



## **Rester à zéro avec des processus affines : une application à la modélisation de la courbe de taux d'intérêt**

**Alain MONFORT**  
Banque de France et CREST

**Fulvio PEGORARO**  
Banque de France, BCE et CREST

**Jean-Paul RENNE**  
HEC Lausanne

**Guillaume ROUSSELLET**  
Université McGill

*Cette lettre présente le résultat de travaux de recherche menés à la Banque de France. Les idées exposées dans ce document reflètent l'opinion personnelle de leurs auteurs et n'expriment pas nécessairement la position de la Banque de France. Les éventuelles erreurs ou omissions sont de la responsabilité des auteurs.*

*Les crises financières récemment observées aux États-Unis, au Royaume-Uni et dans la zone euro ont conduit les banques centrales à abaisser les taux directeurs à des niveaux historiquement bas, entraînant un aplatissement marqué de leurs courbes des taux d'intérêt. Les taux courts sont restés à leur borne inférieure sur des périodes prolongées tandis que les taux longs ont fluctué, affichant une volatilité relativement élevée. Cet article décrit une nouvelle catégorie de modèles affines positifs de la structure par terme des taux d'intérêt introduite par Monfort et al. (2017) et utilisée pour reproduire ces caractéristiques de la courbe des taux d'intérêt. L'analyse empirique proposée suggère également qu'ignorer les primes de risque sur les taux d'intérêt induit une sous-estimation substantielle de la durée du régime de borne inférieure à zéro.*

### **Modéliser les courbes de taux à la borne inférieure**

Avant l'éclatement de la crise financière de 2008, la Banque du Japon était la seule grande banque centrale à avoir abaissé son taux directeur à un niveau proche de zéro. Depuis 2010, toutefois, le maintien des taux directeurs à la borne inférieure (*zero lower bound* – ZLB) s'est étendu au Système fédéral de réserve américain (Fed), à la Banque centrale européenne (BCE) et à la Banque d'Angleterre. En juin 2014, la BCE est devenue la première grande banque centrale à abaisser un de ses taux directeurs (à savoir le taux de la facilité de dépôt) en dessous de zéro<sup>1</sup>. Dans toutes ces zones monétaires, de fortes baisses des taux à court terme ont poussé les courbes de rendement vers des niveaux historiquement bas.

Par exemple, entre janvier 1995 et décembre 2007, sur 80 % de la période, la courbe des rendements sur les titres souverains allemands<sup>2</sup> a été, en moyenne, comprise entre 3 % et 5 % (cf. graphique 1) ; sur la même période, le taux

à trois mois du *Bund* était compris entre 2 % et 4 % sur 80 % de la période. Entre janvier 2008 et février 2017, le niveau moyen de la courbe des rendements allemande a été inférieur à 1 % sur 60 % de la période et inférieur à 2,5 % (cf. graphique 1) sur 90 % de la période. Le taux du *Bund* à trois mois est resté autour de zéro (entre – 50 points de base et + 50 points de base) sur 75 % de la période.

Plus précisément, nous avons observé des taux courts restant à la borne inférieure sur des périodes prolongées, tandis que la volatilité des taux d'intérêt à plus long terme ne s'est pas atténuée et dépend de la maturité. Ce point est illustré pour le cas du Japon dans les graphiques 2 et 3.

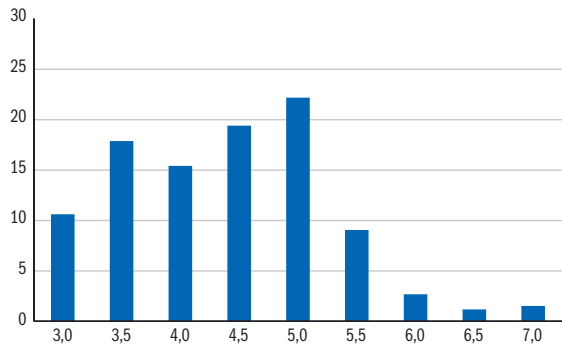
<sup>1</sup> La Sveriges Riksbank a adopté des taux d'intérêt négatifs en 2009 et en 2010, et la Danmarks Nationalbank en 2012. Plus récemment, la Banque nationale suisse a décidé d'introduire un taux négatif début 2015, suivie par la Banque du Japon début 2016.

<sup>2</sup> Le niveau moyen de la courbe des rendements à une date donnée correspond à la moyenne empirique des rendements observés pour l'ensemble des maturités.

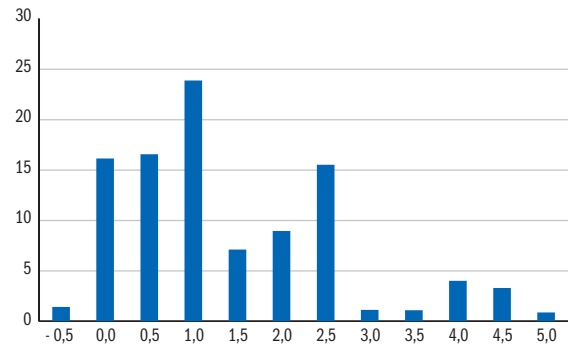
## G1 Niveau moyen de la courbe de rendement du Bund

(en abscisse : taux en pourcentage, base annualisée – intervalles de 50 points de base ; en ordonnée : fréquence d'observations)

a) entre janvier 1995 et décembre 2007



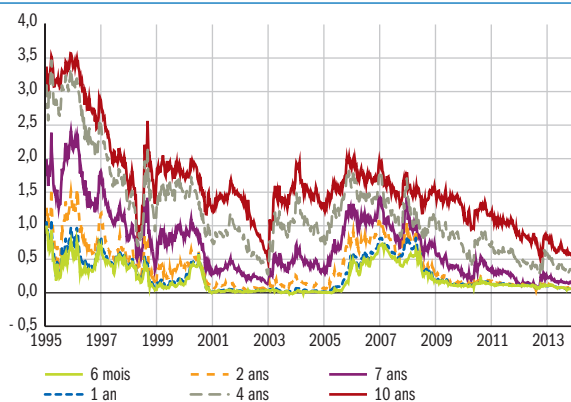
b) entre janvier 2008 et février 2017



Source : Bloomberg.

## G2 Rendements des obligations d'État japonaises

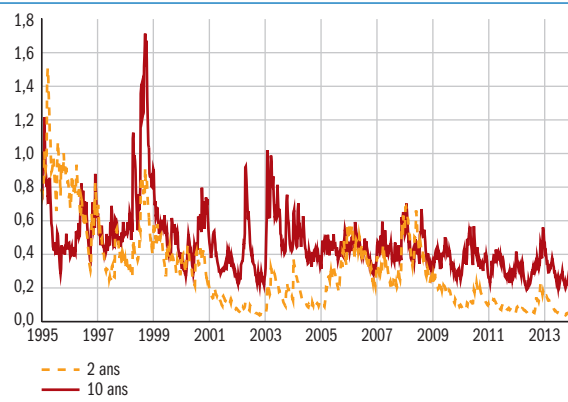
(taux en %, base annualisée)



Source : Bloomberg.

## G3 Approximations de la volatilité conditionnelle des rendements des obligations d'État japonaises

(taux en %, base annualisée)



Sources : Bloomberg, calculs des auteurs.

Il est alors utile de fournir un modèle de structure par terme capable de reproduire et d'expliquer la dynamique de la courbe de rendement dotée de ces nouvelles caractéristiques empiriques que les précédents modèles n'étaient pas capables de reproduire de façon satisfaisante (cf. encadré).

### Un nouveau modèle affine de la structure par terme

Monfort et al. (2017) introduisent un nouveau modèle dynamique de la structure par terme capable de produire simultanément les caractéristiques suivantes :

(i) les rendements à toutes les maturités évoluent au-dessus d'une borne inférieure et sont caractérisés

par des variances conditionnelles variables dans le temps (stochastiques) ;

(ii) les formules pour les rendements actuariels à toutes maturités sont affines ;

(iii) le taux court peut rester figé à sa borne inférieure durant des périodes prolongées ;

(iv) les formules utilisées pour le calcul des dates de sortie de régime de borne inférieure sont analytiques.

Ce degré très élevé de maniabilité et de flexibilité est atteint par l'introduction d'un nouveau processus affine positif (caractérisé par la nouvelle distribution dite Gamma-zéro) impliquant une distribution conditionnelle du taux court avec une masse de probabilité

sur la borne inférieure (sélectionnée) pertinente. Le taux court est donc un processus dit affine qui peut prendre la valeur de la borne inférieure avec une probabilité strictement positive. Les rendements aux maturités plus longues sont également affines et évoluent au-dessus de cette borne inférieure (cf. Monfort *et al.*, 2017, pour plus de détails). Ce modèle de la structure par terme détermine la formule des rendements actuariels pour toute maturité sous le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage.

De plus, la méthodologie de valorisation tient compte de l'aversion pour le risque des investisseurs sans affecter la maniabilité des formules de valorisation : toute variable d'état sélectionnée (c'est-à-dire les informations utilisées par les investisseurs pour valoriser les actifs) est vue comme une source possible de risque qui doit être correctement évaluée afin de déterminer les taux d'intérêt au fil du temps. En d'autres termes, pour chacun de ces facteurs, nous décelons une prime de risque associée qui formalise la compensation qu'un agent peu enclin au risque demandera pour détenir une obligation à long terme plutôt que réinvestir dans une obligation à court terme (sans risque).

La nature affine du modèle facilite largement son estimation. Premièrement, dans l'hypothèse où les facteurs ne sont pas observables, le modèle peut être représenté dans une forme espace-état et la procédure d'estimation, fondée sur les techniques de filtrage de Kalman, se révèle relativement simple. Deuxièmement, cette même propriété induit que les prévisions de rendement et les variances conditionnelles sont des fonctions affines analytiques des facteurs. Cette caractéristique nous permet d'ajouter (au stade de l'estimation) ces deux ensembles de relations sous forme d'équations de mesure supplémentaires dans la forme espace-état du modèle. Les observations associées sont issues d'enquêtes réalisées auprès de prévisionnistes professionnels et d'estimations de la variance conditionnelle des taux d'intérêt à l'aide de modèles de type GARCH. Inclure ces équations contribue à la bonne estimation de la persistance des taux d'intérêt dans la dynamique des facteurs historiques et permet au modèle de reproduire les volatilités des taux d'intérêt observées pour l'ensemble des maturités (cf. section suivante).

## Arguments en faveur d'une modélisation de la courbe des rendements

Quatre raisons essentielles justifient la pertinence économique et financière d'une telle modélisation.

Premièrement, tout taux d'intérêt à long terme peut être séparé entre la trajectoire (à long terme) attendue du taux à court terme (également appelée composante d'anticipation) et une composante de prime de terme. Le premier terme nous indique les anticipations des marchés s'agissant des taux futurs à court terme, tandis que le second mesure la rémunération exigée par les investisseurs pour assumer le risque de taux d'intérêt. Ces deux composantes n'étant pas observables, il faut utiliser un modèle pour mettre en œuvre cette séparation (**raison de prévision**). Deuxièmement, un modèle de courbe des rendements permet d'étudier comment les mouvements sur la partie courte, induits par un choc de politique monétaire, aboutissent à des rendements à plus long terme, liés à la demande agrégée (**raison de politique monétaire**). Troisièmement, lors des émissions de dette nouvelle, les gouvernements doivent décider de la maturité des nouvelles obligations et doivent en comprendre l'incidence sur la courbe des rendements et la dette publique (**raison de politique d'endettement**). Quatrièmement, les investisseurs ont besoin de modèles de courbes des rendements afin d'évaluer et de couvrir correctement le risque associé aux produits dérivés à revenu fixe tels que les swaps, les caps et les floors, les contrats à terme et les options sur les taux d'intérêt (**raison d'évaluation et de couverture**).

Les modèles gaussiens affines les plus répandus ne fournissent pas de borne inférieure pour le taux sans risque à court terme et les rendements induits par les modèles ont des variances conditionnelles constantes (cf. Adrian *et al.*, 2013, et Joslin *et al.*, 2011). La catégorie des modèles affines positifs est capable de garantir des rendements strictement positifs présentant des variances (stochastiques) variables dans le temps, mais le taux à court terme ne peut pas rester à la borne zéro (ou à toute autre borne inférieure ; cf. Cox *et al.*, 1985, Dai *et Singleton*, 2003, ainsi que la bibliographie ci-après). La catégorie proposée récemment de modèles à taux shadow (cf. Bauer *et Rudebusch*, 2016, Christensen *et Rudebusch*, 2016, Carriero *et al.*, 2016) introduit une borne inférieure dans une dynamique à court terme par ailleurs gaussienne. En raison de cette troncature, la formule de rendement à maturité n'est plus explicite. Par ailleurs, lorsque l'économie s'écarte de la borne inférieure (c'est-à-dire lorsque le taux à court terme est plus élevé que le niveau de troncature), les variables d'état présentent une dynamique gaussienne, impliquant donc dans ce cas une variance conditionnelle constante des taux d'intérêt.

## **Évaluation empirique : le cas de la courbe de rendement japonaise**

L'économie japonaise connaissant des taux d'intérêt extrêmement bas depuis le milieu des années 1990, la structure par terme des taux souverains japonais constitue un ensemble de données pertinent pour évaluer la capacité de ce nouveau modèle de la courbe des rendements à saisir les caractéristiques empiriques mentionnées plus haut (cf. Kim et Singleton, 2012).

Monfort *et al.* (2017) examinent les rendements des obligations zéro coupon souveraines japonaises du 16 juin 1995 au 30 mai 2014, pour des maturités de 6 mois à 10 ans. Le graphique 2 montre clairement que, de 2001 à 2006, la courbe de rendement japonaise est entrée en régime de borne inférieure à zéro, le taux d'intérêt à 6 mois restant stable à un niveau presque égal à zéro. Nous observons également que, durant cette même période, les taux à plus long terme ont affiché un degré élevé de variabilité dépendant de la maturité, comme le confirme le graphique 3.

Monfort *et al.* (2017) sélectionnent un modèle à quatre facteurs non observables : l'analyse empirique proposée montre que ce nouveau modèle de la structure par terme est capable de saisir simultanément les niveaux de rendement et les volatilités conditionnelles pour l'ensemble des maturités et de reproduire correctement les données d'enquêtes sur les taux d'intérêt. La comparaison avec les spécifications alternatives met en lumière l'importance d'ajouter des équations de mesure supplémentaires afin d'aider le modèle à saisir les propriétés statistiques des taux directs.

Un résultat très utile de ce modèle est qu'il fournit deux estimations des probabilités de rester dans un régime de borne inférieure à zéro ou de le quitter (également appelées probabilités de sortie de régime) : premièrement, une estimation qui prend en compte le point de vue d'un investisseur peu enclin au risque (généralement appelée probabilités historiques) ; et, deuxièmement, une estimation des probabilités risque-neutres, c'est-à-dire qui seraient obtenues si les investisseurs ne réclamaient pas de rémunération pour être exposés au risque de taux d'intérêt.

De manière intéressante, nous constatons qu'ignorer l'existence de primes de risque sur les taux d'intérêt induit une sous-estimation substantielle de la persistance (durée) du régime de borne inférieure à zéro. En d'autres termes, le taux d'intérêt à court terme devrait rester dans un régime de borne inférieure à zéro plus longtemps si l'on prend correctement en compte le point de vue d'un investisseur peu enclin au risque. En particulier, nous constatons que les probabilités historiques de se trouver dans un environnement de taux bas sont dans de nombreux cas deux à trois fois plus importantes que les probabilités risque-neutres. Ce résultat souligne l'importance de disposer d'un modèle de la structure par terme avec une dynamique neutre au risque et une dynamique historique affines et correctement spécifiées. Ces caractéristiques du modèle permettront de calculer et de comparer facilement les probabilités historiques et les probabilités risque-neutres de rester à la borne inférieure à zéro ou de s'en éloigner.

## Bibliographie

### Adrian (T.), Crump (R. K.) et Moench (E.) (2013)

« Pricing the term structure with linear regressions », *Journal of Financial Economics*, n° 110(1), p. 110-138.

### Bauer (M. D.) et Rudebusch (G. D.) (2016)

« Monetary policy expectations at the zero lower bound », *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 48(7), p. 1439-1465.

### Carriero (A.), Mouabbi (S.) et Vangelista (E.) (2016)

« UK term structure decompositions at the zero lower bound », Banque de France, Document de travail, n° 589.

### Christensen (J. H. E.) et Rudebusch (G. D.) (2016)

« Modeling yields at the zero lower bound: are shadow rates the solution? », dans « *Dynamic Factor Models* », *Advances in Econometrics*, vol. 35, Emerald Group Publishing Limited, p. 75-125.

### Cox (J. C.), Ingersoll (J. E.), et Ross (S. A.) (1985)

« A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica*, vol. 53(2), p. 385-407.

### Dai (Q.) et Singleton (K. J.) (2003)

« Term structure dynamics in theory and reality », *Review of Financial Studies*, vol. 16(3), p. 631-678.

### Joslin (S.), Singleton (K. J.) et Zhu (H.) (2011)

« A new perspective on Gaussian dynamic term structure models », *Review of Financial Studies*, vol. 24(3), p. 926-970.

### Kim (D. H.) et Singleton (K. J.) (2012)

« Term structure models and the zero bound: an empirical investigation of Japanese yields », *Journal of Econometrics*, vol. 170(1), p. 32-49.

### Monfort (A.), Pegoraro (F.), Renne (J.-P.) et Roussellet (G.) (2017)

« Staying at zero with affine processes: an application to term structure modelling », *Journal of Econometrics*, vol. 201(2), p. 348-366.

#### Éditeur

Banque de France

#### Directeur de la publication

Olivier GARNIER

#### Directeur de la rédaction

Françoise DRUMETZ

#### Réalisation

Direction de la Communication

Novembre 2017

[www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr)

