

Peut-on extraire des informations à partir des prix d'options ? Une étude de Monte-Carlo.

Raphaëlle BELLANDO* et Gilbert COLLETAZ*

Résumé : Nous évaluons d'un point de vue statistique la fiabilité des techniques cherchant à extraire des prix d'option la distribution de probabilité neutre au risque afférente aux prix futurs. Nous montrons que compte tenu des données usuellement disponibles sur le marché des options de change, et en particulier du faible nombre de prix d'exercice, les estimations sur des options de change d'un modèle log-normal avec saut, pourtant parcimonieux, sont de qualité médiocre. En particulier, il est impossible de distinguer de façon fiable entre une distribution correspondant à une absence de saut anticipé, et celle intégrant un choc d'amplitude non négligeable.

Abstract : We try - from a statistical viewpoint - to evaluate methods used to recover risk neutral density from option prices. Monte Carlo simulations based on sample sizes usually found in exchange rate option market show that even a parsimonious model, mixing log-normal and poisson processes, cannot distinguish between a distribution free of expected jump and another one with a sensible anticipated realignment.

Mots clefs : densité neutre au risque, anticipations, options, taux de change, modèle avec saut.

Classification JEL : G13 G14.

-
- **LEO-IOF (UMR 6586) - Université d'Orléans**
 - *Ce travail a reçu le concours financier de la Fondation Banque de France pour la recherche en économie monétaire, financière et bancaire. Nous remercions Francis Clinet et Jean-Pierre Gourlaouen ainsi que les participants au séminaire du LEO pour leurs remarques sur une précédente version de cet article. Merci aussi à Charlotte Lespagnol pour son aide précieuse dans le traitement des données. Les erreurs qui subsistent sont nôtres.*

La littérature s'intéressant à la lecture des anticipations des agents dans les prix d'actifs échangés sur les marchés financiers s'est récemment enrichie d'un champ nouveau. En effet, depuis le début des années 90, une recherche importante se développe autour des informations disponibles sur les marchés d'options. L'existence pour un actif donné, d'options cotées pour une même échéance, avec différents prix d'exercice, permettrait d'avoir une information sur l'intégralité de la densité de probabilité du prix de l'actif sous-jacent à l'échéance. Ainsi le marché des options donnerait pour le prix anticipé d'un actif des mesures complémentaires décrivant la distribution de probabilité que lui affectent les marchés : asymétrie, kurtosis. Cette information est intéressante à plusieurs égards.

Les autorités monétaires peuvent y trouver des indications sur l'état d'incertitude du marché, sur leur crédibilité ou sur l'influence de leurs actions.¹ Campa & Chang [1996], Malz [1996] par exemple, utilisent les options de change pour tester la crédibilité du mécanisme de change européen. Dans la même veine, les travaux plus récents de Campa, Chang et Refalo [1998] tentent d'estimer la crédibilité des bornes de variation du réal brésilien. Bates [1996] à partir de séries longues d'options sur le dollar tente d'éclairer le rejet empirique de parité des taux d'intérêt (PTI) non couverte.

Mais la démarche la plus répandue consiste à étudier de façon ponctuelle les anticipations des agents lors de crises majeures : Melick et Thomas [1997] par exemple évaluent l'influence de la crise du Golfe sur les anticipations de prix du pétrole brut. Dans le même esprit, Jondeau et Rockinger [1997] puis Rzepkowski [1998] étudient le comportement des prix d'options lors de l'annonce de la dissolution de l'assemblée nationale en avril 1997².

Une large littérature s'est développée autour des problèmes d'existence et d'unicité de ces densités neutre au risque (DNR), ainsi que sur le liens entre ces densités et les « vraies » anticipations du marché³. Par ailleurs, et c'est la question qui nous concerne ici, l'extraction des distributions de probabilité à partir de prix d'options est problématique sur le plan statistique. Alors que les primes théoriques correspondant aux différents modèles utilisés dans la littérature sont de formes complexes, avec un nombre important de paramètres à estimer, les données disponibles pour ces estimations restent assez peu nombreuses et laissent un nombre de degrés de liberté très faible. La question se pose alors de la fiabilité de ces techniques d'extractions de paramètres. Il paraît donc intéressant de tenter de les évaluer par la méthode de Monte Carlo.

¹ Ces arguments sont développés en particulier dans Bahra [1996] ou dans Neuhaus [1995].

² On peut aussi se référer aux différents rapports annuels de la BRI n°66, 67 et 68 pour trouver des exemples de ce type d'applications.

³ A cet égard, l'article de R. Cont [1998] est très clair.

Aussi, après une revue de la littérature expliquant les principes d'extraction des densités neutre au risque, nous présentons le modèle utilisé puis les résultats d'une simulation de Monte Carlo. Nous montrons les limites empiriques de cette approche, et en particulier que, compte tenu des données couramment disponibles, les seuls chocs anticipés détectables avec fiabilité sont des chocs très rares.

1. Les grands principes d'extraction des densités neutres au risque

Avant d'entrer dans les détails techniques, il paraît important de remettre en perspective les différents articles, les différentes découvertes qui ont suscité cet intérêt pour les DNR.

A la fin des années 70, en marge d'une littérature spécifiquement dédiée au problème de l'évaluation des prix d'options (Black et Scholes [1973], Cox Ross [1976] et Cox Ross et Rubinstein [1979]), Breeden et Litzenberger [1978] démontrent que, dans un monde neutre au risque, on peut lire dans les prix des options la probabilité associée par le marché à différents états du futur. Autrement dit, l'existence d'options à différents prix d'exercice permettrait de lire complètement la distribution du prix futur telle qu'elle est perçue par le marché. Toutefois, tant que l'on suppose la validité du modèle dominant (i-e Black et Scholes, notés par la suite B&S) cette "lecture" présente un intérêt modéré : le processus de diffusion correspond à une densité log-normale, il suffit donc d'utiliser les deux premiers moments de la loi pour le définir entièrement.

En fait, c'est la découverte répétée du phénomène empirique que la littérature appelle "volatility-smile"⁴ qui va donner toute sa valeur à la démonstration de Breeden et Litzenberger. Le *sourire* traduit le fait que les options en dehors de la monnaie ont une volatilité implicite plus forte. Ce qui est incompatible avec un processus de diffusion log-normal à la B&S.

1.1. La probabilité neutre au risque

Il est établi, en particulier par Cox, Ross et Rubinstein [1979] que, si on peut construire à l'aide de plusieurs autres actifs un portefeuille dont le rendement est exactement le même que celui d'une option (disons un call), et ce quel que soit l'état de la nature, alors la valeur de ce call est complètement indépendante du système de probabilité que les agents affectent aux différents états du futur⁵. De plus, il existe un système de probabilité (une mesure de probabilité équivalente à la vraie probabilité, et dite neutre au risque) unique tel que l'espérance (définie dans la mesure de probabilité neutre au risque) de rendement actualisé de chaque actif (l'option, le sous-jacent) soit égale à son prix. Ce résultat est utilisé pour valoriser des options sans référence aux préférences des agents. L'encadré 1 présente et illustre ce principe dans un cadre extrêmement simplifié.

⁴ Pour les changes, les premiers travaux empiriques mettant en évidence le *sourire* sont Bodurtha et Courtadon [1987] et Hsieh et Manas-Anton [1988]. On en trouve des illustrations dans de nombreux articles récents sur les DNR (Gamas[1997] Jondeau et Rockinger [1997], Bahra [1997], ou Soderlind et Svensson [1997]).

⁵ Cela résulte de l'absence d'opportunité d'arbitrage et n'est en rien propre aux options : lorsque l'on établit la relation de parité des taux d'intérêt couverte entre taux de change à terme et taux de change au comptant, les préférences, anticipations et comportements à l'égard du risque n'interviennent pas.

Encadré 1 : un exemple simplifié de valorisation d'une option par la probabilité neutre au risque

Supposons qu'il existe deux états de la nature notés ω_1 et ω_2 . On peut prêter et emprunter à un taux sans risque que nous supposons pour simplifier *égal à zéro*. De plus, il existe un actif de valeur courante $S_0=10$ et qui vaudra en période suivante :

$$S_{\omega_1} = 8 \text{ si } \omega_1$$

et

$$S_{\omega_2} = 12 \text{ si } \omega_2$$

Pour simplifier on supposera que les agents ont tous la même vision du futur, et affectent la même densité de probabilité à la valeur de l'actif considéré : le couple $(p_{\omega_1}, p_{\omega_2})$.

Il existe sur cet actif un call dont le prix d'exercice est 10. Pour valoriser ce call, la première solution consiste à le dupliquer, c'est à dire à construire un portefeuille dont les rendements sont parfaitement identiques que ceux du call et ce, indépendamment de l'état de la nature.

Ici, on sait que le prix de call dans le futur sera :

$$C_{\omega_1} = 0 \text{ si } \omega_1 \text{ (non exercice)}$$
$$C_{\omega_2} = 2 \text{ si } \omega_2 \text{ (exercice et revente au comptant)}$$

On vérifie aisément qu'en achetant 1/2 unité de sous-jacent, et en empruntant pour une somme de $B=4$, on obtient un portefeuille qui a les mêmes rendements qu'un call et ce, quel que soit l'état de la nature.

La valorisation par duplication impose que le prix du call soit égal à la valeur courante (à son prix en période 0) de ce portefeuille.

$$C_0 = \frac{1}{2} \cdot S_0 - B = 1$$

La relation entre le spot et la valeur du call ne fait appel à aucun moment aux préférences ou aux anticipations des agents. Cela ne signifie pas que le niveau du spot et du prix du call n'en dépendent pas. Au contraire, si les marchés sont efficients, le prix d'équilibre de l'actif intègre déjà toute cette information. A anticipations données un actif risqué aura un prix inférieur en cas d'aversion au risque, à celui qui aurait cours en situation de neutralité à l'égard du risque.

Cela étant, on peut définir de manière purement théorique (c'est-à-dire qu'on ne préjuge en rien des préférences des agents) un couple $(p^*_{\omega_1}, p^*_{\omega_2})$ qu'on appelle densité de probabilité neutre au risque, dont les composantes sont les probabilités qui égaliseraient la valeur de l'actif au comptant à l'espérance actualisée de son rendement :

$$S_0 = E^Q(S_1) = p^*_{\omega_1} S_{\omega_1} + p^*_{\omega_2} S_{\omega_2}$$

Un calcul immédiat nous montre que ce couple de probabilités corrigées du risque est ici $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Or la propriété de ce couple est que lorsqu'on calcule la valeur actualisée des rendements du call, on retrouve exactement la valeur obtenue par duplication. Ainsi,

$$C_0 = E^Q(C_1) = p^*_{\omega_1} C_{\omega_1} + p^*_{\omega_2} C_{\omega_2}$$

est encore égal à un. Techniquement, la densité neutre au risque est un outil permettant la valorisation directe du call, et c'est dans cette optique que la littérature sur ce thème s'est développée.

Toutefois, nous devons remarquer que si les agents sont effectivement indifférents au risque, les couples $(p^*_{\omega_1}, p^*_{\omega_2})$ et $(p_{\omega_1}, p_{\omega_2})$ s'identifient parfaitement. C'est en ce sens qu'on la qualifie de « neutre au risque ». De plus, si toutes choses égales par ailleurs (l'éventuelle prime de risque) les prévisions des agents varient (une augmentation de p_{ω_1}) cela se traduira par un mouvement dans le même sens de $p^*_{\omega_1}$. Dès lors, on pourra donner une interprétation plus riche (du point de vue de l'économiste) aux DNR puisque celles-ci intègrent une information sur les anticipations des agents. C'est sur ce constat que se fondent les tentatives d'extraction des densités neutre au risque que nous aborderons plus loin.

Pour généraliser le raisonnement, nous allons nous situer dans le cas d'un call, de type européen, lequel donne le droit et non l'obligation d'acheter à l'échéance T , à un prix

d'exercice fixé à l'origine, un actif dont le prix au comptant en t est noté S_t . Le prix en t d'un call de prix d'exercice X pouvant être exercé en $T=t+\tau$ est noté $C(X, S_t, t)$.

Notons $h^Q(S_t)$ la densité de probabilité neutre au risque du sous-jacent, qui est par définition telle que :

$$S_t = e^{-rt} E_t^Q S_T$$

avec $t=T-t$

Cette densité qu'on appelle aussi « équivalent martingale » ne correspond à la vraie probabilité affectée par le marché au prix de l'actif que dans le cas où les agents sont indifférents au risque, ou si le risque n'est pas intégré au prix de l'actif sous-jacent⁶.

Par ailleurs, on sait que le jour de son échéance (en T) un call vaut ce qu'il rapporte : en l'occurrence zéro si le prix d'exercice est supérieur ou égal au prix de l'actif au comptant, et l'écart entre le spot et le prix d'exercice dans le cas contraire où il y a exercice de l'option.

$$C(X, r, t, S_T) = \max(0, S_T - X)$$

Dans un monde neutre au risque, le prix d'un call, à toute date précédant l'échéance de l'option doit représenter la valeur actualisée de son espérance de gain, conditionnelle à l'information disponible en t , espérance définie dans la mesure de probabilité neutre au risque et notée E_t^Q . Soit :

$$C(X, r, t, S_t) = e^{-rt} E_t^Q \max(0, S_T - X)$$

On peut en déduire la valeur courante d'un call :

$$C(X, r, t, S_t) = e^{-rt} \int_X^{\infty} h^Q(S_T)(S_T - X) dS_T \quad (1.0)$$

A partir de cette écriture on peut extraire des prix cotés de plusieurs calls à différents prix d'exercice, la distribution de probabilité neutre au risque, supposée refléter la vraie distribution du prix du sous-jacent telle qu'elle est perçue par le marché. Cela revient à supposer à supposer que d'éventuelles primes de risque ne déforment pas la densité de probabilité que le marché accorde au prix de l'actif sous-jacent⁷.

1.2. L'extraction de la DNR à partir du prix des options

Breeden et Litzenberger [1978] montrent comment extraire la densité de probabilité neutre au risque à partir des prix des options. Dans l'encadré 2, nous donnons une présentation très intuitive de leur principe.

⁶ Ce point est discuté dans Grundy [1991].

⁷ Une modélisation explicite des primes de risque est réalisée par exemple dans Soderlind et Svensson [1997].

Encadré 2 : prix des options et probabilité des états du futur : une présentation simplifiée⁸

Supposons un monde neutre au risque, à deux périodes, une période courante indiquée 0, et une période future indiquée 1 que l'on peut décrire par un nombre fini (Z) d'états du futur. Le taux sans risque est supposé nul et il existe un actif dont le prix courant est S_0 et qui pourra prendre des valeurs discrètes x allant de 1 à Z dans les différents états du futur. Pour chaque état du futur x , on cherche à construire un titre contingent au sens de Arrow-Debreu, qui vaudra 1 si x est réalisé, et 0 sinon.

Dans un monde neutre au risque, le prix du x ème titre contingent noté $T_0(x)$ est égal à la probabilité associée par le marché à la réalisation du x ème état du futur : $T_0(x) = E(T_1(x)) = \text{proba}(x) \cdot 1 + \text{proba}(\text{non } x) \cdot 0 = \text{proba}(x)$

Ainsi, le vecteur T_0 des x prix d'état s'identifie à la distribution neutre au risque.

L'existence de calls à des prix d'exercice correspondant aux différents états du futur, et notés ci dessous $C(1)$, $C(x)$, ... $C(Z)$, va permettre la construction de tels titres. Dans le tableau ci-dessous, on peut observer qu'en achetant un call à prix d'exercice 1 et un autre à prix d'exercice 3, et en vendant simultanément 2 calls à prix d'exercice 2 (position appelée " papillon ") , on construit un actif qui rapportera 1 si on est dans l'état de la nature 2 et zéro sinon.

Gains des calls et des titres composites en fonction des prix d'exercice et des états de la nature

	calls	C1	C2	C3	C1-C2	C2-C3	(C1-C2)-(C2-C3)
S=1		0	0	0	0	0	0
S=2		1	0	0	1	0	1
S=3		2	1	0	1	1	0
S=4		3	2	1	1	1	0

De façon plus générale, le titre synthétique correspondant au x ème état de la nature est constitué par la combinaison de l'achat de 2 calls : $C(x-1)$ et $C(x+1)$ et par la vente simultanée de deux calls $C(x)$. La probabilité de l'état du futur correspondant sera donc (en notant $C_0(x)$ le prix en période initiale du call de prix d'exercice x).

$$\text{Proba}_0(x) = (C_0(x+1) - C_0(x)) - (C_0(x) - C_0(x-1))$$

On voit que si la densité de S_1 devient une loi continue, en faisant non plus des variations unitaires mais des variations infinitésimales autour de x , la dérivée seconde du prix du call relativement au prix d'exercice sera liée à la densité de probabilité au voisinage de ce point.

$$\text{Si } \Delta x \rightarrow 0 \quad : \quad (C_0(x+\Delta x) - C_0(x)) - (C_0(x) - C_0(x-\Delta x)) = \frac{\partial^2 C_0(X)}{\partial X^2}$$

De façon plus générale, si nous repartons de l'écriture précédente du prix d'un call (équation (1.0)) on voit que la dérivée première de ce prix relativement au prix d'exercice est liée à la fonction de répartition neutre au risque du sous-jacent :

$$\frac{\partial C(t, X)}{\partial X} = -e^{-rt} \left[1 - \int_0^X h^Q(S_T) dS_T \right] = -e^{-rt} [1 - H^Q(X)] = -e^{-rt} \text{Pr ob}(S_T > X) \quad (2.1)$$

⁸ Cette présentation s'inspire très directement de celle qu'en font les auteurs.

où $H^0(X)$ est la fonction de répartition de S_T évaluée au point X . Plus concrètement, la relation (2.1) montre que la dérivée de la valeur d'un call relativement au prix d'exercice, égale la probabilité (actualisée) que l'option soit à l'échéance exercée favorablement (i-e dans la monnaie).

La dérivée partielle relativement au prix d'exercice de l'expression donnée en (2.1) est alors :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} = e^{-rt} h^0(X) \quad (2.2)$$

Ainsi, la dérivée seconde du call relativement au prix d'exercice, donne la densité de probabilité neutre au risque de S_T , évaluée au point $S_T = X$.

Comme nous l'avons dit plus haut, ce résultat présente un intérêt très limité si le processus de diffusion du prix de l'actif est connu, puisqu'on peut en déduire une loi de densité. Par contre, dans la mesure où il y a des preuves de la non validité empirique du modèle dominant de B&S (dont la version appliquée aux changes est présentée plus loin) on est tenté d'appliquer le principe qui vient d'être vu pour en savoir plus sur la distribution de probabilité des anticipations. C'est en ce sens que le phénomène de sourire de volatilité a renouvelé l'intérêt porté aux travaux de Breeden et Litzenberger.

1.3. Les sourires de volatilité et leurs interprétations.

Le *sourire* de volatilité est, nous l'avons dit, un des résultats empiriques les plus souvent évoqués dans le domaine des options, dans la mesure où il remet en cause la validité du modèle standard. Nous présentons ici son mode de construction et sa signification concrète, puis quelques-unes des interprétations qui en ont été données dans la littérature quant au mode de formation des prévisions.

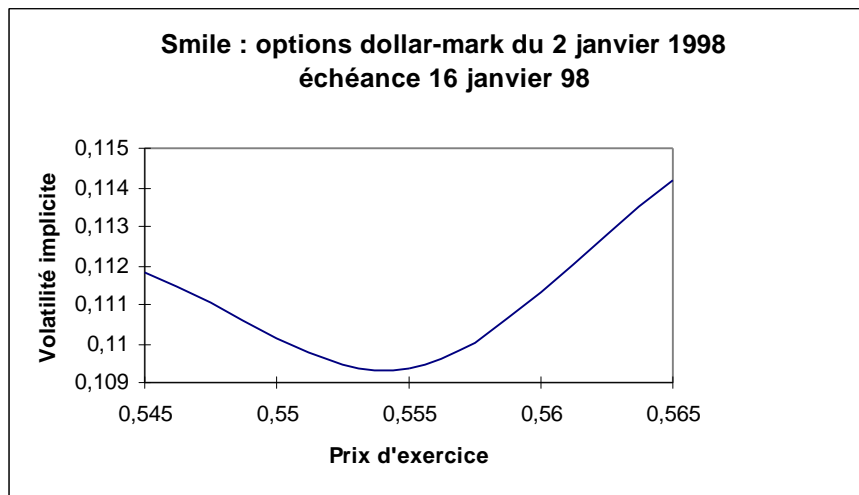
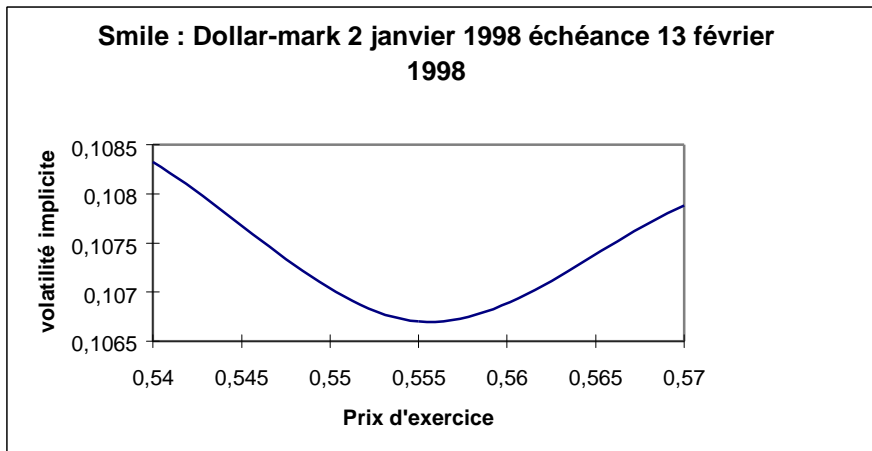
1.3.1. Le « smile ».

Pour construire le « smile » on utilise le fait que, puisqu'il existe une relation bijective entre la volatilité du processus et la prime d'une option, il est possible, en inversant la formule de B&S ou une de ses variantes, de calculer à partir de la prime d'une option donnée, ce qu'il est coutume d'appeler « la volatilité implicite »⁹. Selon le modèle dominant de B&S (qui, nous le verrons plus loin, correspond à une distribution log-normale) la volatilité du processus est unique et indépendante du prix d'exercice.

Or, en effectuant ce calcul sur des calls de prix d'exercice différents, on observe que les options « à la monnaie » (dont le prix d'exercice est égal au taux à terme) ont une volatilité implicite plus faible que les autres, et que plus on s'éloigne du prix d'exercice correspondant plus la volatilité s'accroît. Dans le cas du marché des changes, et sur des options de type européen, le smile est souvent convexe et parabolique, ce qui signifie que la volatilité implicite est une fonction croissante de l'écart en valeur absolue entre le prix d'exercice et le taux à terme. Les graphiques ci-dessous illustrent ce phénomène. Ils ont été construits de façon très parcimonieuse : les données, qui datent du 2 janvier 1998, sont extraites de la base de données

⁹ Sur les marchés de gré à gré les options sont d'ailleurs cotées directement en points de volatilité.

disponible sur le serveur Internet du marché de Philadelphie. On a utilisé la volatilité implicite sur 3 options : une option à la monnaie, plus deux (un put et un call) symétriquement hors de la monnaie¹⁰.



L'interprétation d'un smile est simple : du fait de la relation monotone croissante entre le prix d'une option et sa volatilité, le sourire de volatilité traduit simplement le fait que les options qui ne sont pas à la monnaie ont un prix sur le marché plus élevé que celui prédit par le processus brownien géométrique supposé par B&S. Cela indique que le marché accorde une probabilité plus forte à des valeurs éloignées de la tendance centrale que celle d'une distribution log-normale. Un sourire symétrique et très aigu dénote ainsi une tendance à la " leptokurticité " : le marché accorde alors une probabilité forte à des valeurs extrêmes. Un sourire " en biais " (« smirks ») traduit une asymétrie de la distribution de probabilité du prix de l'actif sous-jacent à l'échéance¹¹.

¹⁰ C'est à dire dont les prix d'exercice sont à distance égale de celui de l'option à la monnaie.

¹¹ Campa, Chang et Reider [1998] par exemple ont calculé à partir des données bancaires du 11 septembre 1996 des sourires de volatilité pour cinq cours de change qui illustrent bien les différentes configurations possibles. Dumas, Fleming et Whaley [1998] évoquent pour les options sur l'indice S&P500 un « sneer » c'est à dire une relation monotone décroissante qui tendrait à remplacer les sourires traditionnels (paraboliques) depuis le crash de 1987.

1.3.2. L'interprétation du « smile » en termes de formation des prévisions.

A partir de ce constat qui remet en cause le modèle log-normal, la recherche s'est, pour l'essentiel, attachée à en tirer des implications quant à la formation des prévisions des agents¹².

Parmi ces travaux, certains cherchent à lire directement les probabilités neutres au risque selon le principe donné par Breeden et Litzenberger. Il s'agit alors de reconstituer à partir de quelques points observés une fonction continue qui ajuste le prix d'un call en fonction de son prix d'exercice (la méthode du spline cubique est utilisée en particulier par Campa et Chang dans leurs différents articles). On en extrait une DNR à partir de la relation (2.2) vue plus haut.

D'autres travaux vont en amont présupposer un type de processus et/ou une forme de distribution de probabilité du prix de l'actif sous-jacent compatible avec les caractéristiques (asymétrie et kurtosis) supposée de la DNR. Parmi ceux-ci, on trouve des modèles à volatilité stochastique (Jondeau et Rockinger [1997] par exemple), ou des travaux supposant que les anticipations du marché peuvent être fondées sur un mélange de lois.

Ainsi, Melick et Thomas [1997], puis Bahra [1996] utilisent un mélange de log-normales, pour représenter la densité de probabilité neutre au risque. Dans une démarche assez semblable, Bates [1996] et Malz [1996] supposent un modèle de diffusion avec saut, lequel est, encore une fois, compatible avec le sourire de volatilité, et dont nous montrons plus bas qu'il est un cas particulier du mélange de log-normales.

Ce type de modèles nous paraît très intéressant du point de vue de leur interprétation en termes d'anticipations. Ils supposent implicitement qu'au moment où les agents forment leurs prévisions, ils envisagent des scénarios multiples et divergents qui se traduisent par de l'asymétrie et de la kurtosis repérées dans les sourires de volatilité.

Si l'extraction des DNR permettait de distinguer entre ces différents scénarios, on pourrait résoudre le « problème du peso », souvent évoqué au cours des années 80. Pour expliquer les rejets systématiques de l'efficience spéculative sur le marché des changes, Krasker [1980] a émis l'idée selon laquelle les agents accordaient une probabilité non nulle à une éventualité qui aurait entraîné une modification radicale de la dynamique du cours de change, mais qui en définitive ne se réalisait pas (d'où le caractère systématiquement biaisé du taux à terme). L'événement en question peut être une dévaluation, mais aussi une sortie d'un système de change géré, un changement de ligne gouvernementale... On voit que la possibilité d'extraire des DNR de ce type à partir des prix d'options permettrait une vérification empirique de cette hypothèse qui bien que séduisante, n'était pas testable jusque là.

Ces méthodes, au-delà de l'intérêt de leur interprétation, présentent aussi un avantage en termes statistiques. Contrairement aux méthodes d'estimation directe, qui sont très coûteuses

¹² Une explication intéressante, et purement théorique, au phénomène du smile est donnée dans le cas des taux de change par Dumas, Jennergren et Näslund [1995]. Ils montrent que dans le cas d'un modèle de zone cible à la Krugman [1991], l'existence de bornes crédibles pour le cours de change entraîne des prix des options différents de ceux du modèle de Garman et Kohlagen. En particulier, ce modèle d'évaluation sous-estime dans le cas des zones cibles le prix des options hors de la monnaie. Ainsi, en présence d'une zone cible affichée ou implicite, on devrait observer un sourire de volatilité sur les options de change.

en données, le fait de supposer de façon relativement rigide un processus, ou une loi, permet de réduire le nombre de paramètres à estimer. En fait, le choix de la technique d'estimation dépend de la question que l'on se pose. S'il s'agit de mettre en place, au jour le jour, une méthode d'observation des anticipations des agents sur les marchés, de façon à détecter des changements brutaux dénotant des prévisions de crises, des pertes de crédibilité, la seconde voie semble préférable. Sur une journée en effet, les données disponibles –qu'il s'agisse des marchés organisés ou de transactions au gré à gré - ne sont pas suffisamment nombreuses pour tenter d'utiliser des méthodes non paramétriques.

De ce fait, nous avons par la suite étudié les propriétés des estimations dans le cadre de ce type de modèle, et en particulier, le modèle avec saut, le plus économe en degrés de liberté, et dont Jondeau & Rockinger [1997] par exemple, montrent qu'il offre des résultats cohérents pour décrire une situation de trouble sur le marché des changes.

2. Le cadre d'analyse.

Après un rappel du modèle « standard » nous verrons deux autres modèles : le modèle de mélange de log-normales dont nous verrons d'ailleurs qu'il est le plus général, (il contient les deux autres modèles présentés), et un modèle avec saut de poisson tel qu'il est utilisé par Malz [1996], et que nous utiliserons par la suite.

2.1. Le modèle log-normal de Garman et Kohlagen [1983]

Le modèle de B&S, adapté au cours de change a été proposé par Garman et Kohlagen [1983]. On suppose que le cours de change au comptant S_t suit un processus de diffusion log-normal:

$$dS = \mathbf{m}S dt + \mathbf{s}SdZ, \quad (3.0)$$

où $\mathbf{m}S$ est la dérive,

$\mathbf{s}S$ est la volatilité du processus,

et Z est un processus de Wiener : $Z(t)$ est une martingale, à accroissements indépendants, et suit une normale $N(0,t)$.

De plus on a $E(dZ)=0$, et $V(dZ) = dt$.

Si S_t suit un processus brownien géométrique, alors le lemme d'Ito permet de montrer¹³ qu'il suit une loi log-normale, i-e :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + (\mathbf{m} - \mathbf{s}^2/2)t + \mathbf{s}dZ \quad (3.1)$$

Alors la densité de probabilité de S_t conditionnellement à S_0 (notée $h_0(S_t)$) est une loi log-normale :

¹³ La démonstration est par exemple (et entre autres) exposée dans l'ouvrage " *Méthodes mathématiques de la finance* " de J. Ch Rochet et G. Demange [1992] chez Economica.

$$h_0(S_t) = LN(S_t; m, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_t \sqrt{v}} e^{-\frac{(\ln S_t - m)^2}{2v}} \quad (3.2)$$

de paramètres :

$$m = E(\ln S_t/S_0) = \ln(S_0) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{s}^2/2)t \quad (3.3)$$

$$v = \text{Var}(\ln(S_t)/S_0) = \mathbf{s}^2 t \quad (3.4)$$

Dans ce cas, on sait que¹⁴ l'espérance de S_t (toujours conditionnelle à S_0) est égale à :

$$E_0(S_t) = S_0 e^{\mathbf{m} t}$$

Pour aboutir à la densité neutre au risque, il faut ajouter qu'il existe une mesure de probabilité équivalente telle que l'on peut écrire le processus suivant¹⁵ :

$$dS/S = (r - r^*) dt + \mathbf{s} dZ,$$

Ce qui revient à préciser la valeur du premier paramètre de la log-normale :

$$m^0 = \ln(S(0)) + (r - r^* - \mathbf{s}^2/2)t$$

On a alors :

$$h^0(S_t) = LN(S_t; m^0, v)$$

On peut alors montrer que le prix d'un call pour une option de type européen (pouvant être exercée à l'échéance seulement) de date d'expiration $T = t + \mathbf{t}$ et de prix d'exercice X s'écrit :

$$C_{LN}(S_t, \mathbf{t}, X, r, r^*, \mathbf{s}) = e^{-r^* \mathbf{t}} S_t N(d1) - e^{-r \mathbf{t}} X N(d2) \quad (4.0)$$

où N représente le densité cumulée de la loi Normale,

$$\text{avec } d1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - r^*) \mathbf{t} + \frac{\mathbf{s} \sqrt{\mathbf{t}}}{2}}{\mathbf{s} \sqrt{\mathbf{t}}} \quad (4.1)$$

$$\text{et } d2 = d1 - \mathbf{s} \sqrt{\mathbf{t}}. \quad (4.2)$$

Ces écritures peuvent être simplifiées de façon à rendre plus claire la présentation des modèles suivants.

¹⁴ En effet, si X suit une log-normale de paramètres m et v alors $E(X) = e^{m+v/2}$.

¹⁵ En termes plus concrets, on suppose la parité des taux d'intérêt non couverte (PTI) qui en temps continu, s'écrit :

$$E_t^Q S_T = F_{t,T} = S_t e^{(r-r^*)t}$$

Sous condition d'efficience spéculative cela revient à dire que le taux de croissance du taux de change : la dérive μ , est à un aléa près égal au différentiel de taux d'intérêt.

Dans l'expression (4.0) on peut utiliser le taux à terme de même échéance que l'option, soit $F_{t,T}$ sachant que la PTI non couverte en temps continu implique :

$$\ln F_{t,T} = \ln S_t + (r-r^*)t$$

En introduisant $F_{t,T}$ dans les relations (4.0), et (4.1) on obtient alors une formule identique à celle que Black [1976] obtient pour le marché des matières premières:

$$C_{LN}(X, r, t, F_{t,T}, \mathbf{s}) = e^{-rt} (F_{t,T} N(d1) - X N(d2)) \quad (5.0)$$

$$\text{avec } d1 = \frac{\ln(F_{t,T} / X) + \mathbf{s}\sqrt{t}}{\mathbf{s}\sqrt{t}} + \frac{\mathbf{s}\sqrt{t}}{2} \quad (5.1)$$

$$\text{et toujours } d2 = d1 - \mathbf{s}\sqrt{t} \quad (5.2)$$

2.2. Le mélange de log-normales

Une méthode utilisée par Melick et Thomas [1997], puis par Bahra [1997] consiste à supposer que la densité neutre au risque peut être ajustée correctement par un mélange de plusieurs log-normales de paramètres différents.

La méthode est souple : elle ne fait pas d'hypothèse sur le processus lui-même. A l'évidence, elle est d'autant plus souple qu'elle intègre un nombre q important de lois log-normales dans sa construction. Toutefois, elle nécessite l'estimation d'un nombre de paramètres égal à $2*q+1$, ce qui la rend très rapidement impossible à estimer lorsque q augmente. Nous présentons ici le cas le plus simple : le mélange de deux log-normales.

Donc nous supposons que la distribution neutre au risque est telle que :

$$h^Q(S_T) = \mathbf{q}(LN(S_T; m_1, v_1)) + (1-\mathbf{q})(LN(S_T; m_2, v_2)) \quad (6.0)$$

avec :

$$m_i = \ln S_t + (\mathbf{m}_i - 1/2\mathbf{s}_i^2)t, \quad (6.1)$$

et

$$v_i = \mathbf{s}_i^2 t \quad (6.2)$$

D'un point de vue intuitif, nous l'avons dit, cela autorise des situations où les agents imaginent pour le futur deux configurations très différentes auxquelles ils affectent une probabilité θ et $(1-\theta)$, où le taux de croissance du prix de l'actif connaîtra potentiellement deux dynamiques de dérive (μ_1 et μ_2) et de volatilité différentes (σ_1 et σ_2).

Alors on peut montrer (voir Bahra [1997] dans son annexe) que le prix d'un call s'écrit selon :

$$C_{2LN}(X, \mathbf{t}, \mathbf{q}, m_1, m_2, v_1, v_2) = e^{-rt} \left\{ \mathbf{q} \left[e^{m_1 + \frac{1}{2}v_1} N(d_1) - XN(d_2) \right] + (1 - \mathbf{q}) \left[e^{m_2 + \frac{1}{2}v_2} N(d_3) - XN(d_4) \right] \right\} \quad (7.0)$$

avec:

$$d_1 = \frac{-\ln X + m_1 + v_1}{\sqrt{v_1}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{v_1} \quad (7.1)$$

$$d_3 = \frac{-\ln X + m_2 + v_2}{\sqrt{v_2}}, \quad d_4 = d_3 - \sqrt{v_2} \quad (7.2)$$

Le lien entre le prix d'un call de ce type peut être réécrit de telle façon à la rapprocher du prix d'un call dans le cas du modèle de Garman et Kohlagen. En notant F_1 l'espérance de S_T dans la première log-normale, et F_2 son espérance dans la seconde, on sait que :

$$F_{t,T}^1 = S_t e^{m_1 t} = e^{m_1 t + \ln S_t} \quad (8.0)$$

$$F_{t,T}^2 = S_t e^{m_2 t} = e^{m_2 t + \ln S_t} \quad (8.1)$$

On peut alors réécrire à partir des équations (6.1) et (6.2)

$$m_i = \ln S_t + \left(\mathbf{m}_i - \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^2 \right) t = \ln S_t + \mathbf{m}_i t - \frac{1}{2} v_i, \quad (8.2)$$

$$e^{m_i + \frac{1}{2}v_i} = e^{\ln S_t + \mathbf{m}_i t} = F_{t,T}^i \quad (8.3)$$

et l'équation (7.0) vaut alors :

7

$$C_{2LN}(X, r, \mathbf{t}, \mathbf{q}, F_{t,T}^1, F_{t,T}^2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = e^{-rt} \left\{ \mathbf{q} \left[F_{t,T}^1 N(d_1) - XN(d_2) \right] + (1 - \mathbf{q}) \left[F_{t,T}^2 N(d_3) - XN(d_4) \right] \right\} \quad (9.0)$$

avec:

$$d_1 = \frac{-\ln X + \ln S_t + \mathbf{m}_1 t - \frac{\mathbf{s}_1^2}{2} + \mathbf{s}_1^2}{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}} = \frac{-\ln X + \ln F_{t,T}^1 + \frac{\mathbf{s}_1^2}{2}}{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}} = \frac{\ln\left(\frac{F_{t,T}^1}{X}\right)}{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}} + \frac{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}}{2} \quad (9.1)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_{t,T}^1}{X}\right)}{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}} - \frac{\mathbf{s}_1 \sqrt{t}}{2} \quad (9.2)$$

$$d_3 = \frac{-\ln X + \ln S_t + \mathbf{m}_2 t - \frac{\mathbf{s}_2^2}{2} + \mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}} = \frac{\ln\left(\frac{F_{t,T}^2}{X}\right)}{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}} + \frac{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}}{2} \quad (9.3)$$

$$d_4 = \frac{\ln\left(\frac{F_{t,T}^2}{X}\right)}{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}} - \frac{\mathbf{s}_2 \sqrt{t}}{2} \quad (9.4)$$

La comparaison de ces équations avec les relations (5.0), (5.1), et (5.2) permet d'établir un lien entre prix des calls dans le modèle mixte, et prix des calls dans le modèle « simple » de Garman Kohlagen. En effet, nous avons :

$$C_{2LN}(X, r, \mathbf{t}, \mathbf{q}, F_{t,T}^1, F_{t,T}^2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{q} C_{LN}(X, r, \mathbf{t}, F_{t,T}^1, \mathbf{s}_1) + (1 - \mathbf{q}) C_{LN}(X, r, \mathbf{t}, F_{t,T}^2, \mathbf{s}_2) \quad (10.0)$$

Le lien avec le modèle log-normal simple est alors relativement simple à établir : le prix d'un call dans le cas où la DNR est un mélange pondéré de log-normales, est une moyenne pondérée (le système de pondération étant identique) du prix d'un call calculé selon le modèle de Garman et Kohlagen avec les paramètres de la première log-normale, et du prix d'un second call calculé de même, avec les paramètres de la seconde loi. Ainsi, ce modèle est plus général que celui de Garman et Kohlagen, puisqu'il l'inclut comme cas particulier lorsque $\theta = 1$.

2.3. Le modèle avec saut de poisson

Bates [1996], et à sa suite Malz [1996] étudient une situation dans laquelle les agents envisagent un décrochage de la parité (hypothèse intéressante dans le cadre du SME puisqu'elle permet d'appréhender d'éventuelle réalignements de parités centrales). Plus généralement, ils vont affecter une probabilité faible à un décrochage massif relativement à leur anticipation moyenne (Bates évoque alors à juste titre le problème du peso déjà cité).

Le processus suivi par le taux de change doit alors être modifié pour intégrer la possibilité d'un saut selon :

$$dS/S = (r - r^* - I k) dt + s dZ + k dq_{t,T}, \quad (11.0)$$

avec $q_{t,T}$ un processus de poisson,

où $\lambda \tau$ est la probabilité du saut au cours de la période,

et k son ampleur supposée ici déterministe.

Dans la version "Bernouilli" du modèle on simplifie le processus en supposant qu'il y aura au plus un choc. Dans ce cas, on peut montrer (Ball et Torous [1983,1985], Malz [1996]) alors que le prix théorique d'un call, C_{SP} s'écrit :

$$C_{SP}(X, r, t, I, F_{t,T}, \mathbf{s}) = (1 - I t) C_{LN}(X, r, t, F_{t,T}^{NS}, \mathbf{s}) + I t C_{LN}(X, r, t, F_{t,T}^S, \mathbf{s}) \quad (12.0)$$

avec $F_{t,T}^{NS}$ et $F_{t,T}^S$ les valeurs espérées du taux de change futur s'il n'y a pas saut, et s'il y a saut, valeurs qui vérifient le système suivant (dont les équations sont d'interprétation évidente) :

$$\begin{cases} F_{t,T} = I t F_{t,T}^S + (1 - I t) F_{t,T}^{NS} \\ F_{t,T}^S = (1 + k) F_{t,T}^{NS} \end{cases} \quad (12.1)$$

$$\text{et par conséquent, } F_{t,T}^{NS} = \frac{F_{t,T}}{1 + I t k} \text{ et } F_{t,T}^S = \frac{(1 + k) F_{t,T}}{1 + I t k} \quad (12.2)$$

Ici encore il s'agit d'un cas particulier du modèle précédent dans lequel la volatilité des deux log-normales est supposée égale.

3. Simulation et évaluation des estimations des paramètres du modèle avec saut de poisson

Le modèle simulé est le dernier exposé que nous appelons par la suite de façon simplifiée « modèle avec saut »¹⁶. C'est donc un mélange d'une log-normale de variance \mathbf{s}^2 et d'une variable de poisson. L'ampleur du saut est notée k et la probabilité annualisée de ce saut, supposé unique sur la durée de vie de l'option I . Soit t cette durée mesurée en années, la probabilité de survenue d'un changement de niveau sur l'horizon considéré est donc égale à $I t$.

Nous avons privilégié cette formalisation pour les raisons suivantes. En premier lieu, dans le cadre des procédures paramétriques il s'agit de la plus simple : seuls trois paramètres sont à retrouver (I , k et \mathbf{s}^2). Le mélange de deux log-normales, dont le modèle avec saut est, on l'a vu, un cas particulier, en requiert quatre (I , k , \mathbf{s}_1^2 , et \mathbf{s}_2^2). Les éventuelles insuffisances de la procédure d'estimation mises en évidence avec le modèle choisi ici sont donc à même d'être retrouvées, en plus prononcées, dans la structure retenue par Bahra [1996]. Par ailleurs, les techniques d'estimation non paramétriques, du type estimation de la densité par les méthodes du noyau ou autres, reposent essentiellement sur du lissage et de ce fait « gourmandes » en données. Précisément, les travaux que nous discutons nécessitent des primes observées à un seul moment du temps ce qui mène à la pénurie plutôt qu'à l'abondance d'observations.

Nous allons donc tenter d'évaluer la qualité des estimations des paramètres d'intérêt en fonction de deux arguments : le nombre de primes disponibles pour les ajustements d'une part, la durée de vie de l'option d'autre part. Le premier élément s'impose immédiatement : la qualité des ajustements est dépendante de la taille des échantillons. Dans le cas présent, la technique usuelle d'estimation est celle des moindres carrés non linéaires et on sait que les estimateurs qui en résultent sont au mieux asymptotiquement convergents. Il importe donc d'étudier, et c'est la motivation principale de ce travail, la qualité des estimations en fonction des tailles réellement disponibles.

Rappelons que dans la littérature, si on ne regarde que les travaux portant sur les changes, les plus favorisés de ce point de vue sont ceux de Jondeau et Rockinger [1997] avec 11 et 13 prix d'exercice sur les deux jours qui les intéressent. Bates [1996] dans ses séries temporelles disposent au minimum de 9 prix. Mais on trouve aussi cinq prix d'exercice chez Campa, Chang et Reider [1998], ou encore chez Bechikh et Mathis [1998], et trois seulement dans l'article de Malz [1996].

Le second élément, la durée de vie de l'option, est pris en compte pour une raison simple. Supposons que l'on soupçonne la survenue d'un saut dans un horizon relativement bref, par exemple un mois. Tout naturellement on retiendra les options dont l'échéance est la plus proche. On peut aussi, à des fins de confirmation, employer des options dont l'échéance dépasse éventuellement largement la période en question, par exemple options à six mois ou un an. Ce faisant il serait possible de tirer une information sur le déroulement des événements prévus à plus long terme. Ainsi, imaginons que sur les données à un mois on obtienne $k > 0$ et que sur celles à six mois on ait $k = 0$. Une interprétation possible est d'affirmer que le marché

¹⁶ Comme nous l'avons évoqué en introduction, nous n'abordons pas ici les problèmes d'existence et d'unicité des DNR qui sont bien connus en particulier pour les modèles avec saut, mais seulement les problèmes statistiques associés à leur estimation.

crain un ajustement à court terme mais croît en la stabilité à plus longue échéance. C'est pour juger de la pertinence de ce type de raisonnement que nous introduisons la dimension « durée de vie de l'option ».

Les conditions de réalisation des simulations sont précisées ci-après. Par la suite nous discuterons des résultats obtenus dans deux cas de figure. En premier lieu, lorsqu'un saut est effectivement affecté d'une probabilité non nulle, en d'autres termes lorsque le modèle avec saut est adapté à la situation réelle. Dans ce cadre, nous étudierons la qualité des estimateurs lorsque le saut anticipé est très important, puis lorsqu'il est d'amplitude plus faible. En second lieu, nous évoquerons le cas où la probabilité d'un saut est nulle, en d'autres termes, quand le modèle de Black-Scholes décrit correctement le monde réel et la structure retenue ici est alors une erreur de spécification.

3.1. Principe et conditions des simulations

La construction des jeux de données employés pour les simulations obéit à la logique suivante : on se donne des conditions initiales, à savoir une échéance (t), des taux domestique et étranger (r et r^*) de maturité t , un taux de change au comptant (S) et une valeur du triplet $\{I, k, S\}$. Cet ensemble détermine en particulier un taux de change à terme. On définit ensuite n prix d'exercice équidistants les uns des autres et distribués autour de ce taux à terme.

La formule d'évaluation (12) est alors utilisée pour évaluer les primes pour chaque prix d'exercice. Les primes en question sont par la suite qualifiées d'exactes. A ce stade, aucune erreur n'est encore présente : supposons que l'on observe les n primes, et l'ensemble des autres paramètres initiaux à l'exception de $\{I, k, S\}$ alors une simple résolution d'équations non linéaires permet de retrouver leurs valeurs de départ du triplet. En fait, ici, seules trois primes sont nécessaires pour effectuer le travail.

Pour fixer des valeurs initiales des taux d'intérêt et de change, nous avons utilisé les observations tirées de la base DATASTREAM le 19 avril 1999 sur l'eurodollar et l'euro, soit un spot pour l'euro de 94,0 et comme structure de taux les valeurs présentées dans le tableau ci-dessous qui donne également le montant du taux de change à terme associé :

maturité	1 mois	3 mois	6 mois	1 an
r	4,8593	4,9375	5,0	5,1875
r^*	2,606	2,621	2,626	2,707
f	93,8237	93,4572	92,8908	91,6970

Dans la suite de l'exercice, et afin de juger de la sensibilité des estimations à la taille des échantillons, trois valeurs ont été retenues pour n : 6, 12 et 24.

Deux aspects méritent d'être quelque peu détaillés : les modalités d'introduction d'erreurs dans la structure exacte précédente, les choix des valeurs du triplet $\{I, k, S\}$.

3.1.1. Les erreurs associées à l'écart de cotation achat-vente

Pour introduire une déviation réaliste relativement au système sans erreur, nous sommes partis du fait que le montant de la prime est observé à une marge près. Soit on utilise la moyenne des prix bid-ask affichés, soit les prix de règlement bid ou ask. Dans les deux cas, une erreur de mesure est commise. Naturellement, d'autres erreurs peuvent également intervenir. Par exemple, les primes peuvent ne pas être affichées au même instant, le relevé du taux de change spot et des taux d'intérêt peuvent aussi se faire avec un décalage temporel, la maturité des taux d'intérêt ne pas coïncider avec celle des options.... A l'évidence les sources d'erreurs sur variables sont multiples et notre solution correspond à des modalités de collecte quasiment idéales en ne retenant qu'une seule origine, celle résultant de l'existence d'une fourchette entre prix de vente et d'achat.

En pratique, nous avons encadré chaque prime exacte par un intervalle d'amplitude égale à 0,25, valeur observée sur les données de Philadelphie pour les options sur l'euro. Les bornes de cet intervalle centré sur la vraie prime sont utilisées pour définir une fonction de densité triangulaire. La prime « bruitée » est alors obtenue par ajout à la prime théorique du résultat d'un tirage de la variable aléatoire ainsi définie. Si l'on se donne n primes exactes, alors en répétant l'exercice pour chacune d'entre elles, on récupère au total n primes « bruitées ». On dispose finalement de n observations pour estimer les trois inconnues $\{I, k, S\}$.

3.1.2. Les valeurs attribuées à la volatilité, la probabilité et l'ampleur du saut

Les derniers choix portent sur les valeurs des paramètres I, k et S . On doit noter tout d'abord que les valeurs de k et S doivent être interprétées en termes relatifs. Ainsi, pour un horizon donné, une amplitude donnée de k n'a pas la même signification selon que S est élevée, auquel cas la réalisation du saut peut être suivie de niveaux de taux de change qui ne se distinguent pas de ceux affichés sans saut, ou que S est faible et les valeurs avec et sans saut se démarquent. Naturellement, ceci ne constitue un problème que lorsque l'on veut simuler un système avec une probabilité strictement positive d'avoir un saut d'amplitude non nulle.

Notons que par la suite, nous fixerons la valeur de la probabilité de saut sur la durée de vie du jeu d'options considéré, c'est à dire la valeur de $I t$. Par ailleurs, cette valeur sera identique pour tous les horizons. De même le saut est identique sur toutes les durées. Cela signifie que nous simulons un décrochage éventuel de l'espérance du taux de change dans les trente jours sans dérive supplémentaire anticipée sur le temps de vie restant des options à trois, six et douze mois. Il s'agit alors de savoir si cet événement est repérable à partir des primes associées aux quatre horizons. On peut également avoir une lecture indépendante des résultats pour chacune des durées, il s'agira par exemple de savoir si une variation de montant k , anticipée avec une probabilité de $I t$, et se produisant dans un délai inférieur ou égal à t peut être révélée de façon satisfaisante.

3.1.2.1. En présence d'un saut anticipé

Pour surmonter la difficulté liée à l'interdépendance entre k et S , nous avons cherché à caractériser les deux états de la nature, avec et sans saut, en termes de survenue d'un événement plus ou moins perturbateur.

Soit h_{NS} la densité en l'absence de saut. On peut rechercher les bornes a et b , symétriques autour du centre de la distribution, telles que par exemple $\int_a^b h_{NS} dx = 90\%$ puis évaluer $\int_a^b h_S dx$, où h_S est la densité qui s'applique en cas de saut. Si cette évaluation donne 5%, alors l'événement correspondant au triplet (I, k, S) peut être qualifié de très perturbateur, au sens où une gamme de cours de change, qui avait quatre-vingt dix chances sur cent de contenir les cours réalisés n'a plus que cinq chances sur cent de contenir ces réalisations si l'événement se produit. En d'autres termes, ce critère revient à considérer qu'un saut attendu est très perturbateur si les deux distributions se distinguent nettement.

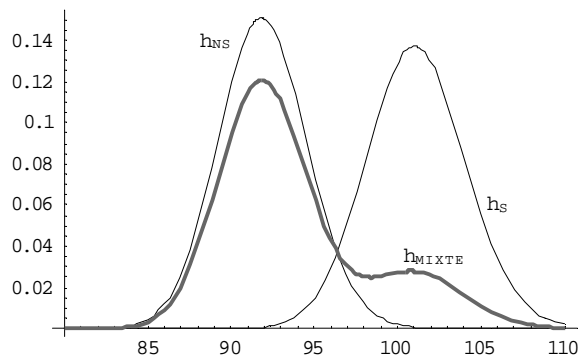
En appliquant ce principe aux options à un mois, nous avons retenu les triplets suivants :

(i) un événement très perturbateur :
$$\begin{bmatrix} I \\ k \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow \int_{87,60}^{96,33} h_{NS} = 90\% \text{ et } \int_{87,60}^{96,33} h_S = 5\%$$

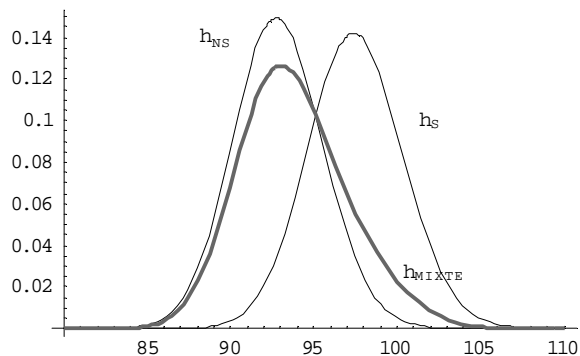
(ii) un événement moyennement perturbateur :

$$\begin{bmatrix} I \\ k \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,05 \\ 0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow \int_{88,48}^{97,30} h_{NS} = 90\% \text{ et } \int_{88,48}^{97,30} h_S = 47\%$$

Les deux graphes ci-dessous illustrent ces deux situations, avec $I t = 0,2$, $t = 1/12$ et donc un mélange de lois $h_{MIXTE} = 0,8 \times h_{NS} + 0,2 \times h_S$,



(i) Événement perturbateur



(ii) Événement moyennement perturbateur

Pour préciser encore ce que l'on entend ici par événement très perturbateur, on peut remarquer que depuis 1973, les variations relatives d'un mois sur l'autre du cours du dollar-mark ont été supérieures à 10% dans 1% des cas seulement¹⁷. En d'autres termes, un événement très perturbateur est un événement rare. Notons aussi que des variations supérieures à 5% qui

¹⁷ La référence historique est forcément restrictive. Rien n'indique que les chocs mensuels de 10% et plus ont été anticipés. Rien ne permet de dire non plus que les agents n'ont pas anticipés plus fréquemment des chocs de ce type, qui ne se sont pas réalisés. On peut toutefois penser, que le passé des cours de changes serve de référence pour la formation des anticipations.

correspond ici à notre événement moyennement perturbateur, ont été observées dans moins de 12 % des cas sur cette même période de temps.

3.1.2.2. En l'absence d'un saut

Le cas correspondant à une erreur de spécification pour le modèle avec saut est simplement décrit par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}t \\ k \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow h_{NS} = h_S$$

3.2. Les résultats et enseignements des simulations

Pour les valeurs données de l'ensemble des paramètres, un échantillon de n primes « bruitées » est donc obtenu par tirage indépendant dans une loi triangulaire qui permet l'obtention de $\{\hat{\mathbf{I}}t, \hat{k}, \hat{\mathbf{s}}\}$.

La démarche est répétée mille fois et nous disposons finalement de mille estimations de $\mathbf{I}t$, k et \mathbf{s} qu'il est possible de comparer aux vraies valeurs¹⁸. Remarquons que ce « bruitage » reste très modéré : la corrélation entre les primes « bruitées » et les primes exactes n'est, dans la totalité des simulations, jamais inférieure à 0.999.

En plus de $\mathbf{I}t$ et k considérés isolément, nous discutons du produit $\mathbf{I}t k$, c'est à dire de l'ampleur anticipée du saut. Il est en effet quelquefois avancé que cette grandeur est estimée de façon plus précise que chacun des paramètres qui la compose¹⁹. Par ailleurs, on trouve chez Malz [1996] notamment, l'affirmation selon laquelle la qualité des estimations de la skewness et de la kurtosis serait meilleure que celle de \mathbf{I} et k . Nous traiterons donc également des moments empiriques d'ordre trois et quatre.

Enfin, un certain nombre de redressements ont été effectués pour la présentation des résultats. En premier lieu, nous avons considéré comme valeur du change F_{NS} la valeur la plus proche du taux à terme²⁰ ou, ce qui revient au même, comme cours intégrant le saut, F_S , celui ayant la plus petite probabilité de réalisation. Par ailleurs, il arrive que les estimations convergent vers une situation où \hat{k} tend vers une valeur excessive, souvent très largement supérieure à 100%, alors que dans le même temps $\hat{\mathbf{I}}$ tend lui vers zéro²¹. Dans ce cas nous avons forcé $\hat{\mathbf{I}}t=1$ et $\hat{k}=0$.

¹⁸ Les estimations ont été réalisées par la technique des moindres carrés non linéaires avec le logiciel RATS.

¹⁹ La raison évoquée est que dans la formule de la prime d'un call (voir équations 12.0, 12.1 et 12.2) les termes $\mathbf{I}t$ et k , sont souvent associés.

²⁰ En effet la distinction n'est pas faite par l'estimation : par exemple, on décrit exactement le même système avec $\{F_{NS}=90, F_S=96, \mathbf{I}t=20\% \}$ et $\{F_{NS}=96, F_S=90, \mathbf{I}t=80\% \}$.

²¹ Un exemple pris au hasard : $\hat{\mathbf{I}}=0,0000020742683$ et $\hat{k}=241,8951379076$, conduirait à $F_{NS}=93,78$ et $F_S=22777,88$.

3.2.1. La détection d'un événement très perturbateur attendu dans une échéance d'un mois

Dans un premier temps, nous discutons, en fonction de la durée de vie des primes et de leur nombre, de la possibilité de détection d'un élément très perturbateur pouvant survenir au cours des trente prochains jours en fonction de la durée de vie des primes et de leur nombre. La discussion portera successivement sur les deux paramètres d'intérêt que sont la probabilité du saut (It) et l'amplitude du saut (k). Nous traiterons ensuite de l'estimation de l'espérance de l'ampleur du saut (Itk), puis nous examinerons les estimations de la skewness et de la kurtosis de la densité mixte.

3.2.1.1. L'estimation de la probabilité de saut It

Les caractéristiques des erreurs d'estimation sont présentées dans le tableau 1 ci après.

Tableau 1. Saut très perturbateur.

Caractéristiques des estimations de $It=0,2$

Echéance		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.040	0.025	0.017
	Moyenne	0.197	0.200	0.199
	Médiane	0.200	0.202	0.199
	1 ^{er} quartile	0.174	0.184	0.188
	3 ^{ième} quartile	0.226	0.218	0.212
	Minimum	0.049	0.118	0.141
	Maximum	0.296	0.269	0.247
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.106	0.083	0.065
	Moyenne	0.207	0.205	0.199
	Médiane	0.226	0.221	0.208
	1 ^{er} quartile	0.125	0.146	0.154
	3 ^{ième} quartile	0.293	0.270	0.249
	Minimum	0	0	0
	Maximum	0.407	0.396	0.335
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.162	0.143	0.126
	Moyenne	0.246	0.216	0.200
	Médiane	0.293	0.254	0.229
	1 ^{er} quartile	0.095	0.069	0.072
	3 ^{ième} quartile	0.378	0.339	0.311
	Minimum	0	0	0
	Maximum	0.499	0.483	0.410
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.197	0.184	0.174
	Moyenne	0.281	0.274	0.246
	Médiane	0.371	0.358	0.318
	1 ^{er} quartile	0.065	0.087	0.037
	3 ^{ième} quartile	0.423	0.403	0.389
	Minimum	0	0	0
	Maximum	0.500	0.499	0.498

Il apparaît que la qualité des estimations se détériore avec la durée de vie des primes et cela quel que soit l'indicateur considéré. Cela indique que le meilleur jeu d'option, est celui qui correspond le mieux à l'horizon supposé du choc.

Par ailleurs, pour un horizon donné, on observe en général une amélioration avec l'augmentation du nombre de primes. Cette amélioration est perceptible au niveau des erreurs quadratiques moyennes, des moyennes et médianes des jeux d'estimateurs, mais à douze mois le biais reste encore important, même avec vingt-quatre primes (moyenne=0,246 et médiane=0,318 pour une valeur exacte de 0,2). A six mois, le biais sur la médiane s'atténue

mais demeure non négligeable sur la médiane (0,293 pour six primes, 0,229 avec vingt-quatre). C'est à trois mois que le biais sur la médiane disparaît avec l'emploi du plus grand échantillon. Par ailleurs la dispersion des estimateurs se réduit faiblement comme le soulignent bien les fréquences dans tableau 2. En particulier, l'obtention de valeurs très éloignées de la valeur exacte devient fréquente dès l'horizon de trois mois.

Au total, la détérioration de la qualité des estimateurs de la probabilité de saut, avec la durée de vie des options domine largement les résultats : même avec vingt-quatre primes, les estimations à trois mois sont moins bonnes que celles obtenues avec seulement six primes à un mois.

Sur cette échéance d'un mois les estimations de It sont de bonne qualité, même sur les échantillons de taille six. Les gains du passage à douze primes sont assez importants : réduction de 40% de l'erreur quadratique moyenne, réduction forte des estimations extrêmes (le minimum passe de 0,049 à 0,118) par exemple. Ces gains sont encore sensibles lors du passage à 24 primes, en particulier la concentration autour de la vraie valeur s'accroît (Cf. tableau 2).

Tableau 2. Saut très perturbateur.
Distribution des estimations de $It=0,2$

Classes	Echéance = 1 mois			Echéance = 3 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
[0,0.075]	4	0	0	157	94	50
]0.075,0.125]	54	1	0	91	100	99
]0.125,0.175]	196	172	81	103	134	198
]0.175,0.225]	483	663	863	148	198	263
]0.225,0.275]	256	164	56	190	250	280
]0.275,0.325]	7	0	0	177	185	108
]0.325,0.375]	0	0	0	114	36	2
]0.375,0.425]	0	0	0	20	3	0
]0.425,0.50]	0	0	0	0	0	0
Classes	Echéance = 6 mois			Echéance = 12 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
[0,0.075]	230	264	258	258	244	287
]0.075,0.125]	48	58	62	32	18	27
]0.125,0.175]	53	62	83	20	20	36
]0.175,0.225]	58	66	90	17	31	26
]0.225,0.275]	77	106	123	24	39	35
]0.275,0.325]	120	148	189	43	76	96
]0.325,0.375]	150	178	166	121	153	153
]0.375,0.425]	171	94	29	247	292	270
]0.425,0.50]	93	24	0	238	127	70

3.2.1.2. L'estimation de l'amplitude du saut k

On retrouve globalement les conclusions obtenues sur l'estimation de la probabilité de saut It , à savoir une détérioration marquée de la qualité des estimateurs avec la durée de vie des options. Par exemple l'erreur quadratique moyenne est à 12, 6 et 3 mois de l'ordre de 10, 5 et 4 fois supérieure à ce qu'elle est à un mois. Il est cependant notable que les erreurs sont plus faibles et que les gains liés à l'accroissement du nombre de primes sont plus marqués qu'auparavant.

Par exemple sur les données à trois mois, l'erreur quadratique moyenne est divisée par 2,5 lorsque l'on passe de six primes à vingt-quatre, de sorte que les estimateurs alors obtenus ont une qualité relativement proche de celle observée sur les estimateurs tirés d'échantillon de taille six de primes à un mois.

Tableau 3. Saut très perturbateur, caractéristiques des estimations de $k=0,1$

Echéance		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.008	0.004	0.002
	Moyenne	0.102	0.100	0.100
	Médiane	0.101	0.100	0.100
	1 ^{er} quartile	0.097	0.098	0.098
	3 ^{ième} quartile	0.105	0.103	0.102
	Minimum	0.087	0.090	0.092
	Maximum	0.172	0.115	0.108
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.035	0.024	0.014
	Moyenne	0.104	0.106	0.104
	Médiane	0.102	0.102	0.101
	1 ^{er} quartile	0.096	0.097	0.098
	3 ^{ième} quartile	0.109	0.108	0.106
	Minimum	0	0	0
	Maximum	0.265	0.254	0.207
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.050	0.047	0.041
	Moyenne	0.098	0.099	0.102
	Médiane	0.112	0.108	0.107
	1 ^{er} quartile	0.097	0.097	0.099
	3 ^{ième} quartile	0.121	0.117	0.114
	Minimum	-0.106	-0.043	0
	Maximum	0.273	0.264	0.234
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.080	0.066	0.058
	Moyenne	0.107	0.105	0.101
	Médiane	0.143	0.132	0.122
	1 ^{er} quartile	0.069	0.098	0.088
	3 ^{ième} quartile	0.158	0.149	0.139
	Minimum	-0.185	-0.120	-0.110
	Maximum	0.282	0.263	0.251

Avec le tableau 4, on remarque que la dispersion des estimateurs de l'ampleur du saut est assez faible, avec un resserrement autour de la vraie valeur en fonction de la taille des échantillons plus marqué qu'avec les estimations de la probabilité du saut.

Tableau 4. Saut très perturbateur.
Distribution des estimations de $k=0,1$

Classes	Echéance = 1 mois			Echéance = 3 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
<-0.175	0	0	0	0	0	0
] -0.175,-0.125]	0	0	0	0	0	0
] -0.125,-0.075]	0	0	0	0	0	0
] -0.075,-0.025]	0	0	0	0	0	0
] -0.025,0.025]	0	0	0	53	10	2
] 0.025,0.075]	0	0	0	2	1	0
] 0.075,0.125]	988	1000	1000	822	889	943
] 0.125,0.175]	12	0	0	82	74	51
] 0.175,0.225]	0	0	0	32	20	4
>.0225	0	0	0	9	6	0
Classes	Echéance = 6 mois			Echéance = 12 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
<-0.175	0	0	0	2	0	0
] -0.175,-0.125]	0	0	0	10	0	0
] -0.125,-0.075]	7	0	0	31	20	2
] -0.075,-0.025]	2	1	0	2	1	3
] -0.025,0.025]	152	143	108	203	208	217
] 0.025,0.075]	1	8	0	2	3	9
] 0.075,0.125]	670	713	754	103	176	311
] 0.125,0.175]	137	100	106	604	577	433
] 0.175,0.225]	24	30	30	35	14	23
>.0225	7	5	2	8	1	2

3.2.1.3. L'estimation de l'espérance du saut : Itk

On retrouve également les conclusions précédentes, à savoir une détérioration prononcée des ajustements avec l'accroissement de la durée de vie des options. L'erreur quadratique moyenne est ainsi, à taille d'échantillon inchangée, multiplié par un facteur allant de trois à six lorsque l'on passe du un mois au trois mois, puis ensuite par un facteur deux lors des passages de trois à six puis de six à douze mois (Cf. tableau 5).

Encore une fois, l'accroissement du nombre de primes, à durée de vie donnée, améliore sensiblement les caractéristiques des estimateurs, mais il subsiste cependant une dispersion relativement élevée. Ainsi, à trois mois avec vingt-quatre primes, 298 estimateurs sont dans la plage contenant la valeur exacte, contre 589 à un mois avec six primes. L'écart maximum-minimum souligne également cette détérioration avec des valeurs respectives de 0.033 dans le premier cas et 0.015 dans le second (Cf. tableau 6).

Il est malaisé, en raison des échelles différentes, de juger de l'affirmation de Malz [1996] selon lequel l'estimation du produit Itk serait meilleure que celle des deux paramètres individuels. Une approche possible est de calculer un pseudo coefficient de variation, en rapportant l'erreur quadratique moyenne, ou plutôt sa racine carrée, à la valeur théorique du paramètre estimé²².

²² Le coefficient de variation rapporte l'écart type estimé, calculé à partir d'écart à une moyenne estimée, à cette moyenne d'échantillon. Ici ce n'est pas la moyenne des estimateurs qui est utilisée mais la valeur théorique connue a priori.

Tableau 5. Saut très perturbateur.
Caractéristiques des estimations de $Itk=0,02$

Echéance		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.003	0.002	0.001
	Moyenne	0.020	0.020	0.020
	Médiane	0.020	0.020	0.020
	1 ^{er} quartile	0.018	0.019	0.019
	3 ^{ème} quartile	0.022	0.022	0.021
	Minimum	0.008	0.013	0.015
	Maximum	0.027	0.026	0.024
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.010	0.008	0.006
	Moyenne	0.021	0.021	0.020
	Médiane	0.022	0.022	0.021
	1 ^{er} quartile	0.014	0.016	0.016
	3 ^{ème} quartile	0.029	0.027	0.025
	Minimum	0	0	0
	Maximum	0.040	0.040	0.033
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.020	0.016	0.013
	Moyenne	0.027	0.023	0.021
	Médiane	0.030	0.025	0.023
	1 ^{er} quartile	0.011	0.009	0.009
	3 ^{ème} quartile	0.043	0.037	0.033
	Minimum	-0.051	-0.019	0
	Maximum	0.058	0.054	0.045
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.037	0.031	0.026
	Moyenne	0.037	0.036	0.031
	Médiane	0.050	0.045	0.037
	1 ^{er} quartile	0.003	0.008	0.005
	3 ^{ème} quartile	0.064	0.059	0.052
	Minimum	-0.068	-0.056	-0.046
	Maximum	0.084	0.076	0.069

Tableau 6. Saut très perturbateur.
Distribution des estimations de $Itk=0,02$

Classes	Echéance = 1 mois			Echéance = 3 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
<-0.125	0	0	0	0	0	0
] -0.125,-0.0075]	0	0	0	0	0	0
] -0.0075,-0.0025]	0	0	0	0	0	0
] -0.0025,0.0025]	0	0	0	53	10	2
] 0.0025,0.0075]	0	0	0	63	39	15
] 0.0075,0.0125]	22	0	0	96	119	91
] 0.0125,0.0175]	185	121	48	130	146	217
] 0.0175,0.0225]	589	782	926	161	213	298
] 0.0225,0.0275]	204	97	26	202	264	278
] 0.0275,0.0325]	0	0	0	168	184	95
] 0.0325,0.0375]	0	0	0	113	23	4
] 0.0375,0.0425]	0	0	0	14	2	0
] 0.0425,0.0475]	0	0	0	0	0	0
>.0475	0	0	0	0	0	0
Classes	Echéance = 6 mois			Echéance = 12 mois		
	6 primes	12 primes	24 primes	6 primes	12 primes	24 primes
<-0.125	9	1	0	35	20	3
] -0.125,-0.0075]	0	0	0	5	0	0
] -0.0075,-0.0025]	0	0	0	4	1	2
] -0.0025,0.0025]	152	143	108	204	208	217
] 0.0025,0.0075]	49	79	103	33	20	55
] 0.0075,0.0125]	58	90	92	27	30	34
] 0.0125,0.0175]	54	64	90	22	16	31
] 0.0175,0.0225]	55	77	104	15	18	35
] 0.0225,0.0275]	68	84	106	13	25	31
] 0.0275,0.0325]	88	102	133	24	31	32
] 0.0325,0.0375]	111	133	145	21	42	63
] 0.0375,0.0425]	104	116	98	20	52	61
] 0.0425,0.0475]	121	81	21	43	74	75
>.0475	131	30	0	534	463	361

Si on procède ainsi, nous obtenons :

$It=0.2$, $k=0.08$, $Itk=0.16$ avec six primes à un mois, et $It=0.09$, $k=0.02$, $Itk=0.07$ avec vingt-quatre primes à un mois.

Ainsi, conformément à ce que laissait paraître la lecture des tableaux précédents, l'estimation de k semble être la plus précise, celle du produit Itk étant seulement marginalement meilleure que celle de la probabilité de saut.

3.2.1.4. L'estimation des skewness et kurtosis du mélange

On trouve chez Bates [1996, p.78] par exemple l'idée que les moments d'ordre trois et quatre pourraient être mieux appréhendés que les paramètres I et k . La raison avancée est que différents jeux de valeurs I , k et, chez lui, s_1 et s_2 , conduisent à des mesures pratiquement identiques de skewness et kurtosis. Ainsi, sans pouvoir remonter nécessairement aux caractéristiques précises du saut, il serait quand même possible d'exploiter l'information contenue dans les estimateurs de ces deux moments, et en particulier de repérer les déformations qu'induirait une perturbation anticipée par les agents. C'est ce que nous allons tenter de vérifier : en effet, l'existence de plusieurs jeux d'estimateurs conduisant à une même skewness, ou kurtosis, n'implique pas logiquement la qualité de cette dernière estimation.

On ne pourra plus, contrairement à ce qui a été fait préalablement, comparer les résultats entre les jeux de primes de durées différentes. En effet skewness et kurtosis se modifient avec l'horizon, en particulier du fait que la variance de la log-normale est affectée par un terme s^2t , ce qu'illustre le graphique 1 de la page suivante. Sur celui-ci, on note en particulier que l'événement défini comme très perturbateur à un mois ne l'est plus du tout à un an par exemple en raison de la convergence des probabilités sous h_{NS} et h_s de la plage de valeurs possibles du spot qui précisément servait à discriminer entre les deux configurations possibles. En d'autres termes, l'accroissement de la variance tend à provoquer la confusion des évolutions que l'on observerait en l'absence et en présence d'un saut²³.

L'autre conséquence est que les écarts en termes de skewness et de kurtosis de la densité mixte par rapport à une simple log-normale se réduisent sensiblement avec l'échéance. En effet, la confusion soulignée préalablement tend à faire croire que les observations sont tirées d'une seule log-normale lorsque l'horizon de l'option s'éloigne.

Les résultats concernant les estimations de la skewness et la kurtosis sont résumés dans le tableau 7. Comme attendu, l'accroissement du nombre de primes améliore la qualité des ajustements. Par ailleurs, on peut considérer qu'il n'y a, ni pour la skewness, ni pour la kurtosis, de dégradation des estimations avec l'échéance. Pour la skewness en particulier, la réduction des valeurs théoriques avec l'horizon est parfaitement détectée.

²³ Pour retrouver notre définition d'un événement très perturbateur à cet horizon de douze mois, il faudrait prendre $k = 38\%$ et $\int_{71,16}^{98,98} h_{NS} = 90\%$, $\int_{71,16}^{98,98} h_{NS} = 5\%$.

Graphique 1. Evolution des distributions avec la durée de vie des options, pour événement très perturbateur attendu dans un mois

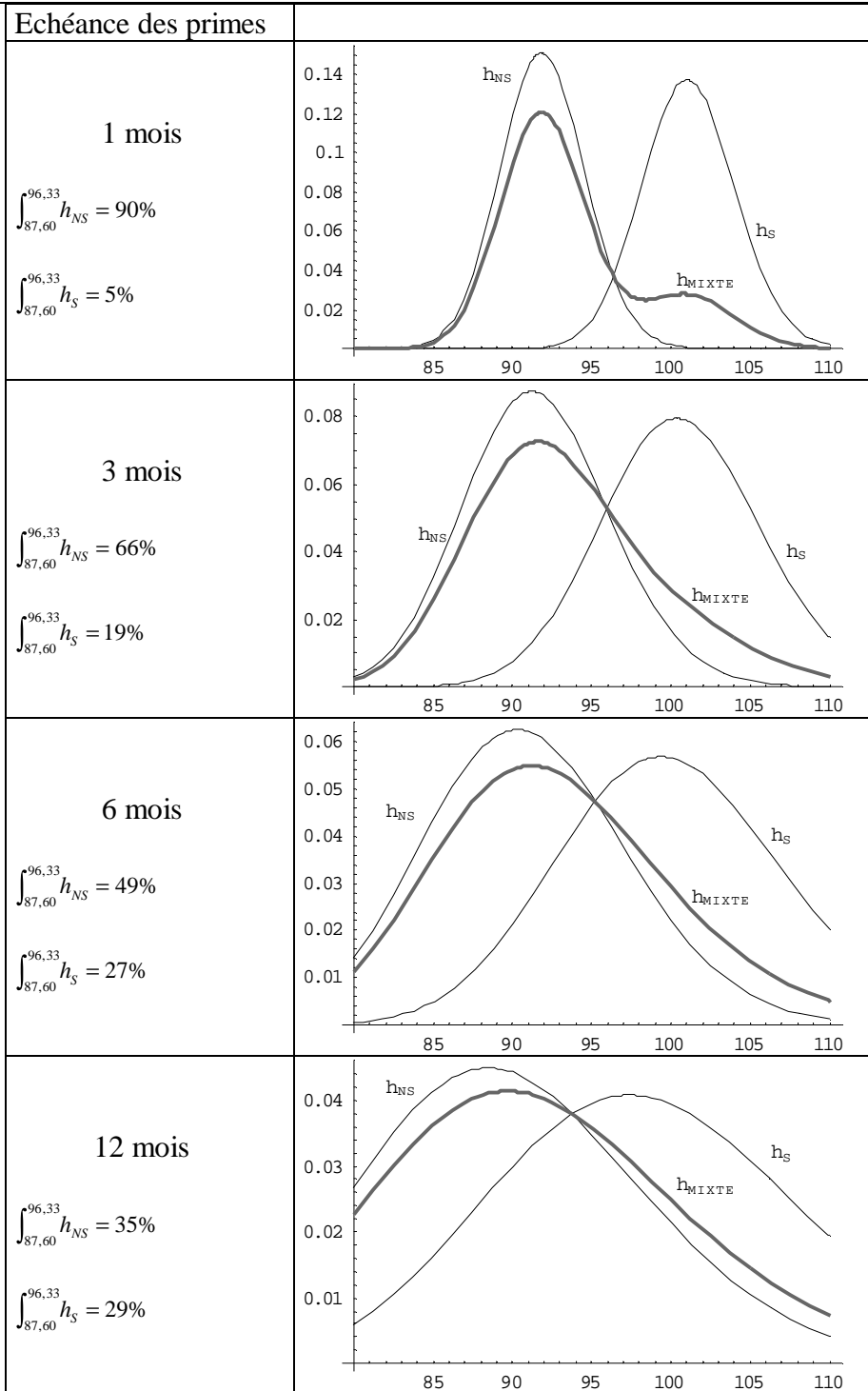


Tableau 7. Saut très perturbateur.
Caractéristiques des estimations de la skewness et de la kurtosis

Echéance et Valeur exacte	Skewness	6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.118	0.071	0.047
0,869	moyenne	0.884	0.871	0.870
	Coefficient de variation	0.135	0.082	0.054
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.166	0.114	0.070
0,518	moyenne	0.511	0.525	0.526
	Coefficient de variation	0.321	0.221	0.135
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.115	0.098	0.079
0,403	moyenne	0.368	0.380	0.389
	Coefficient de variation	0.286	0.242	0.195
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.076	0.055	0.049
0,393	moyenne	0.366	0.374	0.374
	Coefficient de variation	0.194	0.141	0.125
Echéance et Valeur exacte	Kurtosis	6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.503	0.273	0.182
3.282	moyenne	3.355	3.293	3.295
	Coefficient de variation	0.153	0.083	0.055
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.687	0.541	0.339
	moyenne	3.285	3.301	3.288
3,253	Coefficient de variation	0.211	0.166	0.104
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.427	0.348	0.283
3,237	moyenne	3.064	3.153	3.201
	Coefficient de variation	0.131	0.108	0.088
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.404	0.299	0.228
3,270	moyenne	2.998	3.057	3.127
	Coefficient de variation	0.124	0.091	0.070

Globalement, la leçon qui émerge de ces premières simulations est que la détection d'un événement très perturbateur, au sens donné ici, attendu dans un délai d'un mois, peut être réalisée de manière satisfaisante avec un nombre assez restreint de primes à condition que la durée de vie de ces primes soit proche de l'horizon sur lequel doit survenir l'événement en question. Les résultats que nous venons d'observer sur la skewness ne remet pas en cause cela, dans la mesure où la skewness s'estompe pour les horizons longs, alors que c'est ce paramètre qui est supposé nous signaler l'anomalie que constitue le saut anticipé.

De plus, les simulations montrent en particulier que déjà avec des primes à trois mois de durée de vie, la dispersion des estimateurs s'accroît fortement, ceci s'accroissant au point de rendre la technique pratiquement inutilisable pour des durées de vie plus longues en raison de la fréquence de tirages de valeurs très éloignées des valeurs exactes des paramètres d'intérêt.

Naturellement, l'estimation des paramètres « probabilité du saut », « ampleur du saut » et « ampleur espérée » s'améliore avec le nombre de primes, cela étant tout particulièrement vrai pour It et Itk . Cette amélioration est toutefois insuffisante pour les primes à six et douze mois, et dans tous les cas l'emploi de vingt-quatre primes à trois mois conduit à des résultats sensiblement moins bons que l'emploi de six primes à un mois.

Par ailleurs, nous avons noté que k est plus précisément estimé à tous les horizons que les autres paramètres. Dès 6 primes à un mois, on peut considérer que les estimations de l'ampleur du saut sont satisfaisantes.

3.2.2. La détection d'un événement moyennement perturbateur attendu dans une échéance d'un mois

Dans cette partie nous discutons plus brièvement de la capacité de la technique à détecter un événement qualifié de moyennement perturbateur à un mois et défini par $It = 20\%$, $k = 5\%$, $s = 10\%$. Il s'agit de savoir si des anticipations de décrochage des cours plus fréquents qu'auparavant sont révélés, et donc si la méthode peut être d'un emploi plus régulier. Rappelons qu'historiquement, des décrochages de cette ampleur sur données mensuelles ne s'observent que dans moins de 12% des cas sur le dollar-mark depuis les changes flexibles.

Compte tenu des précédents résultats, nous limiterons la discussion aux seuls estimateurs obtenus sur les primes à un mois. On sait en effet que c'est à cet horizon que la qualité des ajustements est la meilleure.

Dans le tableau 8 ci-dessous, nous indiquons les caractéristiques des estimateurs de It , k et Itk . On notera que l'amélioration associée à l'augmentation du nombre de primes porte essentiellement sur l'écart maximum-minimum.

Tableau 8. Saut moyennement perturbateur.
Caractéristiques des estimations de It , k , Itk avec des primes d'échéance un mois

		6 primes	12 primes	24 primes
It	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.158	0.154	0.151
	Moyenne	0.174	0.127	0.095
	Médiane	0.149	0.073	0.052
	1 ^{er} quartile	0.024	0.0	0.0
	3 ^{ième} quartile	0.306	0.228	0.170
	Minimum	0.0	0.0	0.0
	Maximum	0.500	0.499	0.444
k	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.037	0.035	0.036
	Moyenne	0.044	0.044	0.042
	Médiane	0.055	0.054	0.052
	1 ^{er} quartile	0.0	0.0	0.0
	3 ^{ième} quartile	0.062	0.064	0.064
	Minimum	-0.075	-0.054	0
	Maximum	0.156	0.138	0.126
Itk	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.010	0.008	0.007
	Moyenne	0.008	0.007	0.005
	Médiane	0.008	0.005	0.004
	1 ^{er} quartile	0.0	0.0	0.0
	3 ^{ième} quartile	0.016	0.012	0.009
	Minimum	-0.027	-0.022	0.0
	Maximum	0.028	0.025	0.025

En particulier, du fait de l'accroissement, avec ce nombre de primes, du nombre de fois où nous avons à contraindre $\hat{It}=0$ et $\hat{k}=0$, c'est à dire à conclure à l'absence de saut²⁴, les

²⁴ Rappelons qu'il s'agit des cas où la probabilité estimée de saut devient très proche de l'unité (ou de zéro) et l'ampleur estimée du saut devient aberrante.

moyennes et médianes des estimateurs tendent à sous-estimer les vraies valeurs de sorte que pour ces indicateurs, la meilleure qualité est obtenue avec six primes.

On observe aussi un fort accroissement de la dispersion des estimateurs. Si l'on compare les erreurs quadratiques moyennes obtenues sur un événement très perturbateur (Cf. tableaux 1, 3 et 5) avec celles du tableau 8, on constate qu'elles sont maintenant, dans le meilleur des cas, multipliées par quatre pour It , par cinq pour k et par trois pour Itk .

La lecture des fréquences présentées dans les tableaux 9,10 et 11 ci-dessous confirme parfaitement cette détérioration : les paramètres d'un événement moyennement perturbateur estimés avec vingt-quatre primes sont moins précis que ceux afférents à un événement très perturbateur ajustés sur seulement six observations.

Tableau 9. Distribution des estimations de $It=0,2$
en cas de sauts moyennement et très perturbateurs

Classes	6 primes		12 primes		24 primes	
	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%
=0	238	0	311	0	366	0
]0,0.075]	144	4	193	0	201	0
]0.075,0.125]	78	54	84	1	101	0
]0.125,0.175]	78	196	76	172	91	81
]0.175,0.225]	80	483	83	663	81	863
]0.225,0.275]	86	256	80	164	64	56
]0.275,0.325]	79	7	59	0	63	0
]0.325,0.375]	79	0	48	0	23	0
]0.375,0.425]	56	0	39	0	7	0
>0.425	82	0	27	0	3	0

Tableau 10. Distribution des estimations de k
en cas de sauts moyennement et très perturbateurs

Classes	6 primes		12 primes		24 primes	
	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%
<=0	238	0	311	0	366	0
]0,0.015]	0	0	0	0	0	0
]0.015,0.025]	2	0	1	0	0	0
]0.025,0.035]	10	0	4	0	1	0
]0.035,0.045]	50	0	27	0	17	0
]0.045,0.055]	204	0	218	0	207	0
]0.055,0.065]	300	0	206	0	176	0
]0.065,0.075]	82	0	75	0	79	0
]0.075,0.085]	37	0	55	0	55	0
]0.085,0.095]	21	128	50	65	36	11
]0.095,0.105]	20	626	28	821	37	958
]0.105,0.115]	12	195	15	114	15	31
]0.115,0.125]	12	39	6	0	10	0
]0.125,0.135]	3	6	2	0	1	0
]0.135,0.145]	7	2	2	0	0	0
>0.145	2	4	0	0	0	0

Par exemple, au regard de l'estimation de l'ampleur du saut on sera amené au mieux (sur la base des résultats obtenus avec six primes) à conclure, à tort, dans près d'un cas sur quatre à l'absence de saut anticipé. Par ailleurs, on voit bien que les classes correspondant à un choc

supérieur à 8.5% se chevauchent pour $k=5\%$ et $k=10\%$. Dans près de 8% des cas, un saut d'amplitude moyenne, tendra à être confondu avec un saut très perturbateur.

Tableau 11. Distribution des estimations de $I t k$ en cas de sauts moyennement et très perturbateurs

Classes	6 primes		12 primes		24 primes	
	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%	k=5%	k=10%
≤ 0	238	0	318	0	366	0
$]0,0.0025]$	22	0	30	0	29	0
$]0.0025,0.0075]$	200	0	245	0	284	0
$]0.0075,0.0125]$	160	22	178	0	179	0
$]0.0125,0.0175]$	164	185	136	121	122	48
$]0.0175,0.0225]$	138	589	83	782	18	926
$]0.0225,0.0275]$	76	204	17	97	2	26
>0.0275	2	0	0	0	0	0

On peut dès lors douter de la fiabilité de la technique à estimer correctement les paramètres du modèle. En termes strictement qualitatifs, elle n'est toutefois pas dénuée d'intérêt dans la mesure où, environ six fois sur dix, elle signale correctement la prise en compte dans les prix d'un choc anticipé comme étant moyennement perturbateur.

3.2.3. La détection de l'absence d'un saut anticipé.

Dans cette dernière partie, nous tentons d'apprécier la capacité de la technique à ne pas envoyer de message erroné ou, en d'autres termes, à détecter l'absence de saut anticipé.

Les primes sont donc générées à partir du triplet $\{I t = 1, k = 0, s = 1\}$, correspondant à une certitude d'absence de saut. Cependant, compte tenu des redressements effectués²⁵, les estimateurs de $I t$ se lisent dans les tableaux présentés par la suite comme « probabilité d'un saut » et ont donc comme objectif l'estimation d'une valeur exacte valant zéro.

Rappelons encore que lorsque la convergence s'effectue pour des valeurs de \hat{I} particulièrement proche de zéro ou de un, alors \hat{k} tend dans le même temps à prendre des valeurs aberrantes²⁶. Dans ce cas, nous contraignons $\hat{I}=0$ et $\hat{k}=0$, ce qui est favorable à l'hypothèse nulle d'absence de saut.

Les tableaux 12, 13 et 14 donnent les caractéristiques des estimateurs de $I t$, k et $I t k$ en fonction du nombre de primes utilisées et de la durée de vie de celles-ci.

En ce qui concerne la probabilité d'un saut, il apparaît que toutes les estimations fondées sur les primes de durée de vie supérieures à un mois sont particulièrement mauvaises. Un nombre élevé de valeurs situées à forte distance de zéro est obtenu, comme le montre bien le décalage

²⁵ Voir l'introduction du point 3.2, et la note 18, page 19.

croissant observé entre moyenne et médiane, les valeurs comprises entre 0,2 et 0,4 de ces deux statistiques, ainsi que le montant du troisième quartile.

Tableau 12. Absence de saut - caractéristiques des estimations de $l t=0$

Echéance		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.244	0.209	0.139
	Moyenne	0.162	0.119	0.055
	Médiane	0.060	0	0
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.367	0.272	0
	Maximum	0.480	0.480	0.479
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.302	0.292	0.287
	Moyenne	0.237	0.219	0.209
	Médiane	0.288	0.252	0.214
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.417	0.414	0.418
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.312	0.313	0.322
	Moyenne	0.241	0.241	0.250
	Médiane	0.324	0.339	0.353
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.430	0.431	0.442
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.333	0.334	0.333
	Moyenne	0.267	0.268	0.267
	Médiane	0.385	0.383	0.390
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.439	0.439	0.437

Tableau 13. Absence de saut - caractéristiques des estimations de $k=0$

Echéance		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.044	0.033	0.020
	Moyenne	0.003	-0.001	-0.000
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	-0.041	-0.017	0
	3 ^{ième} quartile	0.045	0	0
	Minimum	-0.094	-0.089	-0.081
	Maximum	0.126	0.107	0.094
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.055	0.050	0.043
	Moyenne	0.008	0.006	0.008
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	-0.053	-0.047	0
	3 ^{ième} quartile	0.063	0.057	0.051
	Minimum	-0.121	-0.114	-0.107
	Maximum	0.130	0.119	0.088
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.075	0.070	0.064
	Moyenne	0.022	0.020	0.027
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.090	0.087	0.082
	Minimum	-0.187	-0.139	-0.138
	Maximum	0.184	0.153	0.139
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.110	0.104	0.097
	Moyenne	0.059	0.060	0.060
	Médiane	0.110	0.105	0.097
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ième} quartile	0.141	0.134	0.125
	Minimum	-0.192	-0.323	-0.173
	Maximum	0.267	0.203	0.183

Au total, seules les estimations obtenues avec des primes à un mois sont fiables, et cela à condition de disposer d'échantillons de taille suffisante. Avec six et douze primes le biais sur la

moyenne reste important, de même que le nombre de valeurs estimées de montant élevé puisque dans ces deux cas, un quart des estimateurs sont supérieurs à respectivement 0,37 et 0,27.

La dégradation de la qualité des estimateurs avec la durée de vie de l'option, ressort également des estimations de l'ampleur du saut, même si celle-ci semble mieux appréhendée que la probabilité du saut, un résultat que nous avons déjà trouvé lors des précédentes simulations. Par exemple, moyenne et médiane sont encore satisfaisantes à six mois. Cependant le tirage de valeurs élevées continue d'être très fréquent, ainsi à trois mois et avec vingt-quatre primes, il y a encore un quart des estimateurs dont le montant est supérieur à 5%, c'est à dire à ce que nous avons qualifié d'événement moyennement perturbateur. La situation n'est de ce point de vue pas meilleure à un mois avec six primes, d'autant que le montant du premier quartile décale également de zéro : 50% des estimateurs affichent une possibilité de saut supérieur à 4%.

Tableau 14. Absence de saut - caractéristiques des estimations de $Itk=0$

		6 primes	12 primes	24 primes
1 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.011	0.009	0.005
	Moyenne	-0.000	-0.000	-0.001
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	-0.004	-0.001	0
	3 ^{ème} quartile	0.003	0	0
	Minimum	-0.025	-0.023	-0.021
	Maximum	0.025	0.023	0.021
3 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.019	0.017	0.016
	Moyenne	0.002	0.002	0.003
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	-0.011	-0.005	0
	3 ^{ème} quartile	0.021	0.018	0.017
	Minimum	-0.035	-0.034	-0.031
	Maximum	0.039	0.036	0.036
6 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.028	0.023	0.026
	Moyenne	0.009	0.005	0.011
	Médiane	0	0	0
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ème} quartile	0.035	0.026	0.034
	Minimum	-0.047	-0.056	-0.041
	Maximum	0.055	0.063	0.049
12 mois	Erreur quadratique moyenne^{1/2}	0.045	0.042	0.040
	Moyenne	0.025	0.025	0.025
	Médiane	0.032	0.034	0.035
	1 ^{er} quartile	0	0	0
	3 ^{ème} quartile	0.060	0.057	0.053
	Minimum	-0.063	-0.059	-0.052
	Maximum	0.077	0.072	0.069

On retrouve globalement les mêmes enseignements sur l'estimation de l'ampleur anticipée du saut, à savoir une rapide dégradation de la fiabilité des résultats avec l'horizon. On note ainsi que les quartiles font apparaître dès la durée de trois mois une fréquence trop élevée (au moins un quart des observations) de valeurs correspondant à ce que nous nommons ici événement très perturbateur (avec une valeur théorique de $Itk=0.02$). Comme avec les deux tableaux, seuls les résultats obtenus avec des primes à un mois sont relativement satisfaisants avec cependant encore des affichages de valeurs très éloignées des valeurs théoriques ce que soulignent les valeurs prises par le minimum et le maximum.

L'examen de la dispersion est réalisé de façon plus précise à partir des tableaux des fréquences ci-dessous.

Tableau 15. Fréquence des estimateurs de It , k et Itk en fonction du nombre de primes à un mois en l'absence d'événement perturbateur et en présence d'un événement moyennement perturbateur.

It	6 primes		12 primes		24 primes	
	k=0	k=5%	k=0	k=5%	K=0	k=5%
Classes						
=0	364	238	558	311	769	366
]0,0.075]	163	144	92	193	68	201
]0.075,0.125]	56	78	41	84	20	101
]0.125,0.175]	38	78	24	76	17	91
]0.175,0.225]	27	80	16	83	8	81
]0.225,0.275]	36	86	22	80	10	64
]0.275,0.325]	33	79	22	59	17	63
]0.325,0.375]	47	79	56	48	18	23
]0.375,0.425]	76	56	70	39	26	7
>0.425	160	82	99	27	47	3
$ k $	6 primes		12 primes		24 primes	
Classes	k=0	k=5%	k=0	k=5%	k=0	k=5%
=0	364	238	558	311	769	366
]0,0.015]	0	0	0	0	0	0
]0.015,0.025]	3	2	7	1	6	0
]0.025,0.035]	16	10	36	4	65	1
]0.035,0.045]	181	50	231	27	111	17
]0.045,0.055]	262	204	87	218	21	207
]0.055,0.065]	55	300	27	206	18	176
]0.065,0.075]	57	82	17	75	4	79
]0.075,0.085]	25	37	20	55	4	55
]0.085,0.095]	19	21	11	50	2	36
]0.095,0.105]	6	20	3	28	0	37
]0.105,0.115]	7	12	3	15	0	15
]0.115,0.125]	4	12	0	6	0	10
]0.125,0.135]	1	3	0	2	0	1
]0.135,0.145]	0	7	0	2	0	0
>0.145	0	2	0	0	0	0
Itk	6 primes		12 primes		24 primes	
Classes	k=0	k=5%	k=0	k=5%	k=0	k=5%
=0	364	238	558	318	769	366
]0,0.0025]	70	22	52	30	55	29
]0.0025,0.0075]	179	200	116	245	58	284
]0.0075,0.0125]	82	160	53	178	37	179
]0.0125,0.0175]	100	164	113	136	50	122
]0.0175,0.0225]	164	138	102	83	31	18
]0.0225,0.0275]	41	76	6	17	0	2
>0.0275	0	2	0	0	0	0

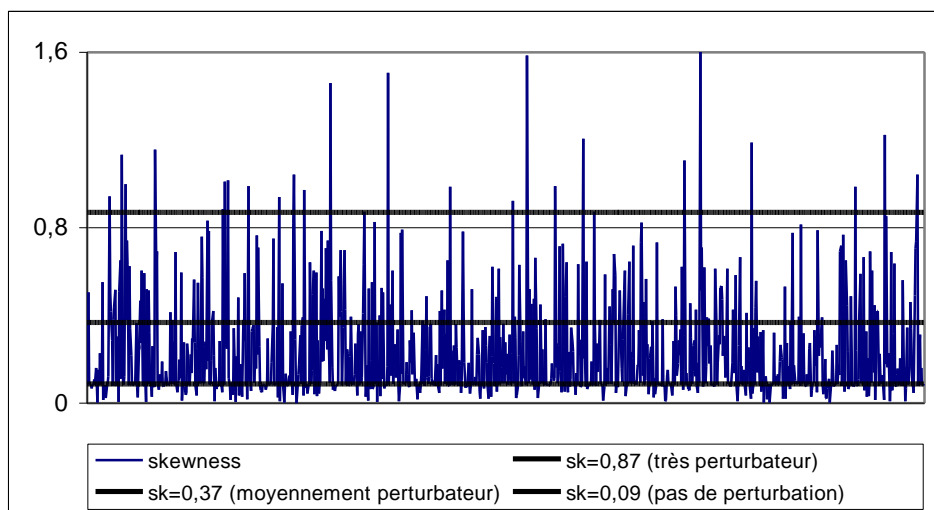
Seuls ont été retenus les résultats paraissant satisfaisants, c'est à dire les estimations tirées de primes à un mois de durée de vie. Par ailleurs, pour simplifier leur lecture, nous avons considéré les valeurs absolues pour k et Itk dans la mesure où seul importe l'écart par rapport à zéro qui est dans ce cas la valeur théorique des deux paramètres. Enfin, pour comparer les deux situations créées par une anticipation de survenue d'un événement moyennement perturbateur d'une part et de l'absence de perturbation d'autre part, nous avons fait apparaître les valeurs correspondantes tirées des tableaux 9, 10 et 11.

A l'exception peut-être des résultats obtenus sur les échantillons de taille vingt-quatre, il ressort que le recouvrement des valeurs dans les deux situations interdit pratiquement toute conclusion quelque peu assurée : en cas d'absence de saut, les estimateurs s'étalent largement sur les plages également couvertes par ceux obtenus en cas de choc moyennement perturbateurs. Par ailleurs, même avec vingt-quatre primes, des difficultés d'interprétation apparaissent puisque plus du tiers des estimateurs afférents à la situation où $k=5\%$ sont nuls.

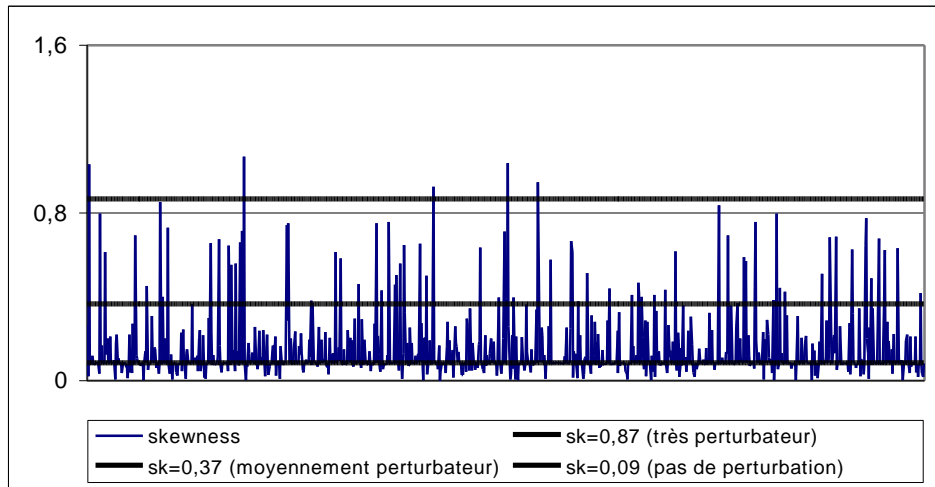
Pour terminer, nous allons revenir sur les estimations des moments d'ordre trois et quatre. En fait, nous nous limiterons à présenter les enseignements tirés du calcul de la skewness puisque le modèle de saut affecte surtout la mesure de symétrie. Dans les trois graphiques suivants nous représentons les skewness obtenues avec six, douze et vingt-quatre primes à un mois ainsi que les valeurs théoriques de ce paramètre en l'absence de saut ($sk=0,09$), en cas d'événement moyennement perturbateur ($sk=0,37$) et très perturbateur ($sk=0,87$).

La fiabilité que l'on peut attribuer à ces estimateurs de skewness est à l'évidence particulièrement faible lorsque l'on dispose de six ou douze primes : dans ces deux cas, le nombre de fois où la valeur du paramètre correspond à celle associée à un événement moyennement perturbateur est trop élevée au sens où l'on dépasse trop souvent la valeur $sk=0,37$. Ce n'est que pour $n=24$ que l'on peut donner une interprétation assez raisonnable aux valeurs obtenues. Toutefois il ne s'agit là encore que d'un résultat dont l'utilité pratique est douteuse puisque sur des échantillons de taille vingt-quatre, et dans la configuration « événement moyennement perturbateur », on obtient des valeurs qui se situent trop souvent sur les plages de valeurs couvertes par les estimateurs obtenus soit en cas d'absence de saut, soit en cas d'événement très perturbateur. Ceci ressort parfaitement du graphique 5 ci-après. Au total, en comparant les graphes 4 et 5, on peut avancer que même sur de grands échantillons on ne parviendra pas à discriminer selon les valeurs des estimateurs entre les différentes configurations « saut moyen versus non saut » d'une part, « saut moyen versus saut important » d'autre part.

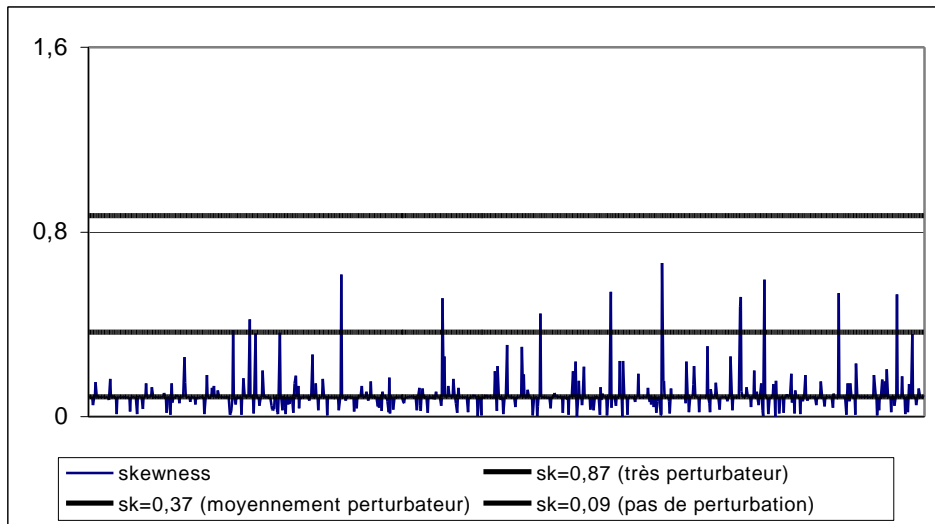
Graphique 2 – skewness estimée sur six primes dans le cas d'absence de saut



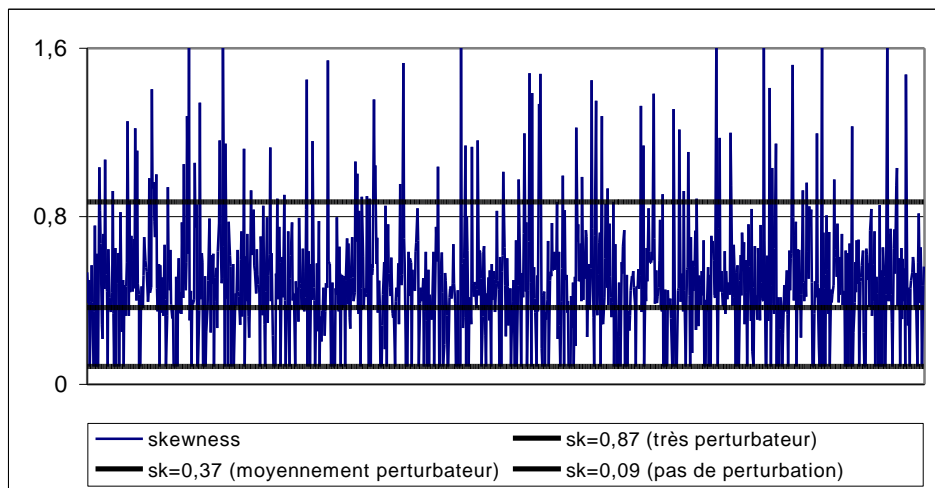
Graphique 3 – skewness estimée sur douze primes dans le cas d'absence de saut



Graphique 4 – skewness estimée sur vingt-quatre primes dans le cas d'absence de saut



Graphique 5 – skewness estimée sur vingt-quatre primes avec un saut moyennement perturbateur



Conclusion

L'idée d'aller chercher sur les marchés d'options des informations complémentaires sur la distribution de probabilité sur laquelle se fondent les anticipations du marché apparaît très séduisante. Toutefois, dans la mesure où ces techniques nécessitent des estimations assez complexes, avec des données peu nombreuses, il nous a paru nécessaire d'étudier et d'évaluer la précision des estimateurs ainsi obtenus. Pour ce faire, nous avons choisi parmi les techniques en présence celle qui nécessite le moins de points. Elle présente par ailleurs une interprétation simple et claire sur la manière dont les agents forment leurs prévisions.

Nous l'avons testé dans un cadre très favorable : la « réalité » est simulée selon ce modèle, les erreurs de mesure sont très modérées²⁷. Les principaux résultats qui ressortent de cette étude sont les suivants :

- Les options permettent de détecter des chocs importants dans la mesure où ceux-ci sont supposés se réaliser sur leur durée de vie résiduelle. Cela ne signifie pas que, par essence, les options longues donnent une information imprécise. Nous obtiendrions pour les options à un an des résultats proches de ceux que nous avons obtenu pour l'horizon de un mois si nous avons considéré un saut très perturbateur pour cette échéance (soit $k=38\%$ voir note 20). Simplement, nos résultats montrent que la pratique assez courante qui consiste à multiplier les horizons pour étudier les conséquences d'une crise, où de l'annonce d'une crise proche, sur les anticipations, n'est pas fiable. On peut remarquer que les agents n'étant pas prêts à parier sur la base de prévisions à des horizons longs, les crises « lointaines » risquent de toutes façons de ne pas être inscrites dans les prix d'options. Il est donc toujours préférable de s'intéresser aux options dont la durée de vie résiduelle est relativement courte²⁸. Enfin, même si nous avons montré que skewness et kurtosis étaient aussi correctement estimées aux différentes échéances, il n'en reste pas moins que dans le cas d'un choc anticipé à court terme, il n'y aura pas de skewness²⁹ particulière à déceler sur les options longues. Ici encore on peut douter de l'intérêt de les utiliser.

- Les sauts que nous avons qualifiés modestement de « moyennement perturbateurs », et qui correspondent tout de même à un écart de 5% sont malaisés à identifier clairement³⁰. Il est tout d'abord difficile de les distinguer du cas sans saut. Imaginons que le calcul sur six prix d'exercice d'une option courte donne une estimation du saut de 5%. Nous savons que cette valeur a été atteinte ou dépassée dans près de 50% des cas alors qu'il n'y avait pas saut. A

²⁷ Nous avons dans le cadre de cette recherche tenté de réaliser la même démarche avec le mélange de log normales présenté plus haut (soit un paramètre de plus à estimer). Ces tentatives ont fait apparaître des résultats encore plus mauvais qu'ici, auxquels s'ajoutaient des problèmes de convergence très fréquents.

²⁸ Cette proposition peut apparaître problématique sur certains marchés, où les cours –en particulier les cours au comptant- sont très perturbés dans la période qui précède la date d'exercice de l'option.

²⁹ Ni de kurtosis, mais cela est vrai à tout horizon, pour le modèle retenu.

³⁰ Nous discutons ici de l'amplitude des sauts, sachant que ce paramètre est estimé avec une plus grande précision que la probabilité de saut. Par ailleurs des estimations ont été menées avec une valeur plus grande (0.5) de la probabilité de saut $\lambda\tau$ et un saut de 5% et montrent que l'augmentation de cette probabilité n'améliore que très relativement les résultats. En particulier, alors que le produit $\lambda\tau k$ est plus grand, les estimations sont bien moins précises que celle obtenues avec $\lambda\tau=20\%$ et $k=10\%$.

l'autre extrême, les estimations d'un saut moyen coïncident pour une part non négligeable avec celles obtenues avec un saut très grand.

- Les sauts anticipés d'une très forte amplitude devraient pouvoir être détectés correctement, avec un nombre réduit de primes. On n'a jamais conclu à la nullité du saut attendu dans ce cas, et plus, on a vu que 99% des estimations étaient dans une plage de + ou - 2.5% autour de la vraie valeur. Cette situation se distingue très nettement de la situation d'absence de saut, puisque là, nous n'avons atteint de valeur supérieure à 7.5% que dans 5% des cas.

Cette conclusion est assez pessimiste. La réalisation de chocs de ce dernier type est trop exceptionnelle : quatre cas sur trente ans nous l'avons dit. Les évolutions correspondant au saut qualifié ici de moyennement perturbateur sont probablement celles que l'on cherche à détecter (on les observe 41 fois sur les 350 mois de la période des changes flexibles). A cet égard, on peut remarquer que les valeurs trouvées les jours de crise dans les travaux utilisant le modèle avec saut sont de cet ordre de grandeur. Ainsi, Jondeau et Rockinger [1997] obtiennent pour la date supposée perturbée par l'annonce de la dissolution de l'assemblée un saut d'amplitude inférieure à 3% avec des options à 1 mois sur le franc-mark. De même, Malz [1996], lorsqu'il étudie la crise du SME de l'été 1992, trouve 74 de ses 78 observations inférieures en valeur absolue à 5%.

Pour ces situations intermédiaires, notre étude montre qu'à moins de disposer d'un nombre plus grand de prix d'exercice (ce qui ne se décrète pas) le message délivré par ces techniques d'extraction est trop brouillé pour être significatif. A moins d'avoir déjà repéré un événement potentiellement perturbateur, et d'en rechercher la trace dans les anticipations du marché - ce qui au mieux ne fait que confirmer un a priori.- les résultats risquent d'être ininterprétables. Comme souvent, on doit cependant pouvoir trouver un intérêt à ces travaux dans des études rétrospectives visant à comprendre une succession d'événements passés.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ball C. & W. Torous [1983], “A simplified jump process for common stock return”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 18, pp 53-65.

Ball C. & W. Torous [1985], “On jump in common stock prices and their impact on call option pricing”, *Journal of Finance*, mars 85, pp 155-173.

Bahra B. [1997], “Implied risk-neutral probability density function from the option prices : theory and application”, *Bank of England Working papers series n°66* july.

Bahra B. [1996], “Probability distributions of the future asset prices implied by option prices.”, *Bank of England Quarterly Bulletin* august, pp.299-311.

Bates D. [1996], “Dollar jump fears, 1984-1992 distributional abnormalities implicit in currency futures options.”, *Journal of international Money and Finance*, vol 15 n°1 pp.65-93.

Bechikh Y. & A. Mathis [1998], “Où va le dollar-yen ?”, *Eco-notes de la BNP*, n°2.

Black F. [1976], “The pricing of commodity contracts.”, *Journal of Financial Economics*, 3 pp.167-179.

Black F. & M. Scholes [1973], “The pricing of options and corporate liabilities.”, *Journal of Political Economy*, 81 n°3 pp.637-654.

Bodurtha J. et G. Courtadon [1987], “Tests of an American option pricing model on the foreign currency options market.”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22 pp.153-167.

Breeden D. et R. Litzenberger [1978] “Prices of states contingent claims implicit in option price.”, *Journal of Business* 51, pp 621-651.

Campa J. M., Kevin Chang P.H. [1996], “Arbitrage based tests of target zone credibility : evidence for ERM cross-rate options.” *American Economic Review*, LXXXVI, pp. 726-40.

Campa J. M., Kevin Chang P.H. [1998], “ERM realignment risk and its economic determinant as reflected in cross-rate options.” *The Economic Journal*, 108, pp. 1046-66.

Campa J. M., Kevin Chang P.H. & R.Reider [1997], “ERM bandwidths for EMU and after : evidence from foreign exchange options.” *Economic Policy*, 24, pp. 55-89.

Campa J. M., Kevin Chang P.H. & R.Reider [1998], “Implied exchange rate distributions : evidence from OTC option markets.” *Journal of International Money and Finance*, 17, pp 117-160.

Campa J. M., Kevin Chang P.H. & J. Refalo [1998], “An options-based analysis of emerging market exchange rate expectations : Brazil’s real plan.” NBER working paper n°6929.

Cont R [1998], “Beyond implied volatility – Extracting information from options prices” Working paper disponible sur internet (WoPEC), avril, 26 p.

Cox J. et S. Ross [1976] “The valuation of options for alternative stochastic process.” *Journal of Financial Economics*, 3 pp 145-166.

Cox J. S. Ross & Rubinstein [1979] “Option Pricing : a simplified approach”, *Journal of Financial Economics*, 7 pp 229-263.

Dumas B.,J Fleming & R. Whaley [1998], “Implied volatility functions : empirical tests ” *Journal of Finance* ,LIII, 6, pp 2059-2106.

Dumas B.,L.P Jennergren & B. Näslund [1995], “Currency option pricing in credible target zones ” *European Economic Review*, 39, 8, pp 1523-44.

Gamas M.N. [1997], “Extraction d’informations du marché des options par la Banque Centrale : application au marché monétaire français ” Document de travail présenté aux XIVèmes journées internationales d’Economie monétaire et bancaire, Orléans 5 et 6 juin 1997.

Garman M. & S. Kohlagen [1983], “Foreign Currency Option Values. ”, *Journal of international Money and Finance*, n°2 pp.231-237 .

Grundy B. [1991], “Options prices and the underlying asset’s return distribution. ” *Journal of Finance*, 46, pp. 1045-1069.

Hsieh D. & L. Manas-Anton. [1988], “ Empirical regularities in the deutsche-mark futures options. ” *Advances in Futures and Options Research*, 3, pp. 183-208.

Jondeau E. et Rockinger M. [1997] “ Estimation et interprétation des densités neutres au risque ” NER de la Banque de France n°47.

Krasker W [1980], “ The “peso problem” in testing the efficiency of forward exchange market”, *Journal of Monetary Economics*, 6, pp. 269-276.

Krugman, P. [1991], “ Target zone and exchange rate dynamics ”, *Quarterly Journal of Economics*, 106, pp. 669-682.

Malz A. [1996], “ Using options prices to estimate realignment probabilities in the European Monetary System : the case of sterling-mark. ”, *Journal of International Money and Finance*, vol 15, n°5, pp 717-748.

Melick W. et Ch.Thomas [1997] « Recovering an Asset’s Implied PDF from Options Prices : An Application to Crude Oil during Golf Crisis » *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 32 n°1, pp 91-115.

Musiela M. & M. Rutkowski [1997], *Martingale methods in financial modeling*. Applications of mathematics Spring.

Neuhaus H. [1995] “The information content of derivatives for monetary policy” *Economic research Group Discussion Paper n°3/95*, Deutsche-Bundesbank.

Rochet J. Ch et G. Demange [1992], *Méthodes mathématiques de la finance*. Economica.

Rzepkowski B. (1998) *Les anticipations du marché révélées par les options de changes*.
Thèse de Doctorat.

Söderlind P., Svensson L. [1997], “New techniques to extract market expectations from financial instruments ” CEPR Discussion paper n°1556.